80903.pdf 140/99
99/00903

LAPORAN PENELITIAN

METODE MATRIKS UNTUK MENENTUKAN SOLUSI PARTIKULIR PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE TINGGI TAK HOMOGEN DENGAN KOEFISIEN KONSTANTA

Universitas Terbuka

Oleh :

Drs. ZULMAHDI DAILAMI
Dra. Asmara Iriani Tarigan
Dra. Dwi Astuti Aprijani

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Pusat Studi Indonesia - Lembaga Penelitian
UNIVERSITAS TERBUKA

1 9 9 9

Koleksi Perpustakaan Universitas Terbuka

80903.pdf

Lembar Pengesahan
Laporan Penelitian PSI-UT

1. a. Judul Penelitian	:	Metode Matriks untuk Menentukan Solusi Partikulir Persamaan Diferensial Linear Orde Tinggi Tak Homogen dengan Koefisien Konstanta.
b. Bidang Penelitian	:	MATEMATIKA
2. Ketua Peneliti		
a. Nama lengkap dan gelar	:	Drs. Zulmahdi Dailami
b. NIP	:	131-643-904
c. Golongan kepangkatan	:	III/d
d. Jabatan Fungsional	:	Lektor Madya
e. Fakultas/Unit Kerja	:	FMIPA
3. Anggota tim peneliti		
a. Jumlah anggota	:	2 orang
4. Lama Penelitian	:	5 bulan
5. Biaya Penelitian	:	Rp 4.300.000,- (*empat juta tiga ratus ribu rupiah*).

Pondok Cabe, 20 Maret 1999

Mengetahui,
Dekan FMIPA

Dr. Djati Kerami
NIP 130 422 587

Ketua Peneliti

Drs. Zulmahdi Dailami
NIP 131 643 904

Menyetujui,
Kepala PSI-UT

Dr. Tian Belawati
NIP 131 569 974

Menyetujui,
Ketua Lembaga Penelitian UT

WBP Simanjuntak, MEd, PhD
130 212 017

Universitas Terbuka

Koleksi Perpustakaan Universitas Terbuka

80903.pdf

DAFTAR ISI

Universitas Terbuka

Koleksi Perpustakaan Universitas Terbuka

80903.pdf

ABSTRAK

Penelitian ini adalah mencari formula umum metode Matriks untuk menentukan *solusi partikulir* Persamaan Diferensial Linear Orde Tinggi Tak Homogen Dengan Koefisien Konstanta. Penelitian ini merupakan telaahan lanjutan dari penelitian *Metode Matriks Untuk menentukan Solusi Partikulir* (*Khusus*) *Persamaan Diferensial Linear Orde Dua Tak Homogen Dengan Koefisien Konstanta* (1997).

Universitas Terbuka

Koleksi Perpustakaan Universitas Terbuka

80903.pdf

I. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Persamaan Diferensial (*PD*) banyak digunakan untuk membantu merumuskan atau memodelkan suatu permasalahan dalam berbagai bidang, baik dalam bidang sains dan teknologi maupun bidang-bidang lain, seperti bidang sosial dan ekonomi. Sebagai contoh, jika sebuah batu dijatuhkan, maka percepatannya dirumuskan sebagai PD orde 2, yakni, $y'' = g$ (*hambatan udara diabaikan*), di mana $y'' = \frac{d^2x}{dt^2}$ dan g percepatan gravitasi. Jika PD di atas diintegralkan maka diperoleh rumus kecepatan: $y' = gt + V_0$ (V_0 *kecepatan awal*). Selanjutnya, jika diintegralkan sekali lagi diperoleh rumus jarak: $y = \frac{1}{2}gt^2 + V_0 t$.

Proses integrasi, yang diungkapkan di atas, menggambarkan proses pencarian solusi suatu PD. Pencarian metode-metode untuk mendapatkan solusi PD merupakan suatu bidang yang selalu berkembang dalam matematika.

Penelitian ini merupakan telaahan lanjutan dari penelitian Zulmahdi Dailami yang berjudul "Metode Matriks Untuk Menentukan Solusi Partikulir (*Khusus*) PD Linear Orde Dua Tak Homogen dengan Koefisien Konstanta," Tahun 1997, Pusat Studi Indonesia, Lembaga Penelitian, Universitas Terbuka. Metode ini diungkapkan oleh Herman Gollwitzer, Drexel University, Philadelphia di The College Mathematics Journal 25 no. 5 (1994); 444 - 448.

Koleksi Perpustakaan Universitas Terbuka

1.2. Batasan dan Perumusan Masalah

Batasan telaahan dalam penelitian ini adalah PD Linear Tak Homogen Orde tinggi ($n > 2$) dengan Koefisien Konstanta:

$$y^{(n)} + c_1 y^{(y-1)} + \cdots + c_{n-1} y' + c_n y = r(x), \qquad \ldots \quad (1.2.1)$$

di mana $c_1, c_2, \cdots, c_n$ konstanta sebarang dan $r(x) = P_N(x) e^{\alpha x}$; $\alpha = b + i\omega$ dan $P_N(x)$ polinomial berderajat N.

Jika $r(x) = P_N(x) e^{bx} \cos \omega x$, maka $r(x) = \mathrm{Re}\left[P_N(x) e^{\alpha x}\right]$.

Jika $r(x) = P_N(x) e^{bx} \sin \omega x$, maka $r(x) = \mathrm{Im}\left[P_N(x) e^{\alpha x}\right]$.

Universitas Terbuka

1.3. Tujuan Penelitian

Memeriksa apakah perumusan formula metode Matriks dapat diperluas untuk menentukan solusi partikulir PD Linear Tak Homogen Orde tinggi dengan Koefisien Konstanta.

1.4. Manfaat Hasil Penelitian

- Rumus umum Metode Matriks dapat dipakai sebagai metode alternatif untuk mencari solusi partikulir PD Linear Tak Homogen Orde n dengan Koefisien Konstanta.

- Penelitian ini diharapkan dapat menjadi pendorong bagi staf akademik Jurusan Matematika FMIPA UT untuk melakukan penelitian di bidang Matematika.

Koleksi Perpustakaan Universitas Terbuka

80903.pdf

II. METODE PENELITIAN

- Studi Jurnal yang berkaitan dengan permasalahan.
- Studi Literatur tentang konsep matriks dan polinomial.
- Merumuskan formula metode matriks untuk menentukan solusi partikulir PD Linear Tak Homogen Orde Tiga dengan Koefisien Konstanta.
- Menelaah formula metode matriks yang dihasilkan untuk menentukan solusi partikulir PD Linear Tak Homogen Orde Dua dan formula metode matriks untuk solusi partikulir PD Linear Tak Homogen Orde Tiga dengan Koefisien Konstanta.
- Merumuskan formula umum metode Matriks untuk menentukan solusi partikulir PD Linear Tak Homogen Orde tinggi dengan Koefisien Konstanta.

Koleksi Perpustakaan Universitas Terbuka

Universitas Terbuka

80903.pdf

III. TINJAUAN PUSTAKA

3.1. Persamaan Karakteristik dan Akar Karakteristik PD

Suatu PD linear tak homogen orde n dengan koefisien konstanta: $y^{(n)} + c_1 y^{(n-1)} + \cdots + c_{n-1} y' + c_n y = r(x)$, mempunyai persamaan karakteristik $m^n + c_1 m^{n-1} + \cdots + c_{n-1} m + c_n = 0$. m_1 disebut akar-akar karakteristik PD, jika $m_1^{\,n} + c_1 m_1^{\,n-1} + \cdots + c_{n-1} m_1 + c_n = 0$

3.2. Multiplisitas

Polinomial derajat N: $P_N(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ dapat difaktorkan sebagai $P_N(x) = (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_k)^{m_k}$ di mana $x_1, x_2, \cdots, x_k$ adalah akar-akar dari $P_N(x)$ dan $m_1, m_2, \cdots, m_k$, dengan $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = N$ disebut multiplisitas akar-akar $P_N(x)$.

Koleksi Perpustakaan Universitas Terbuka

80903.pdf

3.3. Perumusan Formula

Dari hasil telaahan [ZD];[TD], perumusan formula metode matriks, untuk menentukan solusi partikulir PD linear tak homogen dengan koefisien konstanta untuk orde dua dan tiga, diperoleh dari kesamaan

$$\begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k(\alpha)e^{\alpha x} \\ \left(k'(\alpha) + k(\alpha)x\right)e^{\alpha x} \\ \vdots \\ \left(k^{(n)}(\alpha) + nk^{(n-1)}(\alpha)x + \cdots + nk(\alpha)x^{n-1} + k(\alpha)x^n\right)e^{\alpha x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} e^{\alpha x} \qquad \ldots \quad (3.3.1)$$

Kesamaan (3.3.1) apabila ditulis dalam bentuk perkalian matriks menjadi:

$$(\vec{\mathrm{a}}^{\,t} Q\vec{x})e^{\alpha x} = \vec{a}^{\,t}\vec{x}e^{\alpha x},$$

dengan - $\vec{\mathrm{a}}$ vektor berukuran $(N+1)\times 1$, di mana N adalah derajat polinomial $P_N(x)$ dan unsur-unsurnya terdiri dari koefisien-koefisien polinimial pengandaian yang ekivalen dengan polinomial $P_N(x)$,

- $\vec{a}$ vektor berukuran $(N+1)\times 1$, di mana N adalah derajat polinomial $P_N(x)$ dan unsur-unsurnya terdiri dari koefisien-koefisien polinomial $P_N(x)$,

- $\vec{x}$ vektor berukuran $(N+1)\times 1$ yang unsur-unsurnya merupakan variabel polinomial,

- Q matriks bujursangkar segitiga bawah berukuran $(N+1)\times(N+1)$ yang unsur-unsurnya terdiri dari persamaan karakteristik PD dan turunannya.

Koleksi Perpustakaan Universitas Terbuka

Universitas Terbuka

80903.pdf

Permasalahan di sini adalah memeriksa matriks Q sehingga Q mempunyai invers. Untuk memeriksa matriks Q, digunakan konsep-konsep matriks berikut.

Definisi 1. [SL] *Suatu matriks Q berukuran $(n\times n)$ mempunyai invers apabila diagonal utamanya tidak sama dengan nol dan rank* $(Q) = n$. *Matriks Q yang berukuran $(n\times n)$ dengan rank $(Q) = n$ disebut matriks non singular.*

Definisi 2. [SL] *Suatu matriks Q berukuran $(n\times n)$ dikatakan mempunyai invers apabila determinannya tidak sama dengan nol* $\left(|Q| \neq 0 \right)$.

Teorema 3. [PB] *Determinan suatu matriks segitiga adalah sama dengan perkalian elemen-elemen diagonal utamanya.*

3.3.1. PD Orde Dua

Dari [ZD], PD linear tak homogen orde dua dengan koefisien konstanta:

$$y'' + c_1 y' + c_2 y = P_N(x)e^{\alpha x},$$

mempunyai persamaan karakteristik:

$$m^2 + c_1 m + c_2 = 0.$$

Koleksi Perpustakaan Universitas Terbuka

80903.pdf

Perumusan solusi partikulir PD secara umum adalah

$$y_p = \left(\vec{a}^{\,t} Q_j^{-1} \vec{x}\right) x^j e^{\alpha x}; \quad j = 0,1,2,$$

di mana:

- $\vec{a}^{\,t} = [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_N]$; $a_0, a_1, \ldots, a_N$ adalah koefisien dari polinomial $P_N(x)$.

- $\vec{x}^{\,t} = [1 \quad x \quad \cdots \quad x^N]$ dengan $1, x, \cdots, x^N$ merupakan variabel polinomial $P_N(x)$.

- $j = 0$, jika $k(\alpha) \neq 0$ dengan $k(\alpha) = \alpha^2 + c_1\alpha + c_2$ yang diperoleh dari persamaan karakteristik PD, sehingga

$$Q_0 = \begin{bmatrix} k(\alpha) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ k'(\alpha) & k(\alpha) & 0 & \cdots & 0 \\ k''(\alpha) & 2k'(\alpha) & k(\alpha) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ k^{(n)}(\alpha) & nk^{(n-1)}(\alpha) & (kb)k^{(n-2)}(\alpha) & \cdots & k(\alpha) \end{bmatrix}.$$

- Jika $k(\alpha) = 0$, maka $|Q_j| = 0$; $j = 0$, sehingga matriks Q_j singular. Agar $|Q_j| \neq 0$, ruas kiri dan kanan dari kesamaan (3.3.1) diturunkan terhadap α., sehingga $j = 1$, diperoleh

$$Q_1 = \begin{bmatrix} k'(\alpha) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ k''(\alpha) & 2k'(\alpha) & 0 & \cdots & 0 \\ k'''(\alpha) & 3k''(\alpha) & 3k'(\alpha) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k^{(n+1)}(\alpha) & (n+1)k^{(n)}(\alpha) & & \cdots & (n+1)k'(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Universitas Terbuka

Koleksi Perpustakaan Universitas Terbuka

- Apabila masih $|Q_j| = 0;\ j = 1$, maka ruas kiri dan kanan dari kesamaan (3.3.1) diturunkan sekali lagi terhadap α. Sehingga $j = 2$ dan diperoleh

$$Q_2 = \begin{bmatrix} k''(\alpha) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ k'''(\alpha) & 3k''(\alpha) & 0 & \cdots & 0 \\ k^{iv}(\alpha) & 4k'''(\alpha) & 6k''(\alpha) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ k^{(n+2)}(\alpha) & (n+2)k^{(n+1)}(\alpha) & & \cdots & (n+2)k''(\alpha) \end{bmatrix}.$$

3.3.2. PD Orde Tiga

Dari [TD], PD linear tak homogen orde tiga dengan koefisien konstanta:

$$y''' + c_1 y'' + c_2 y' + c_3 y = P_N(x) e^{\alpha x},$$

mempunyai persamaan karakteristik:

$$m^3 + c_1 m^2 + c_2 m + c_3 = 0.$$

Perumusan solusi partikulir PD secara umum adalah

$$y_p = \left(\vec{a}' Q_j^{-1} \vec{x}\right) x^j e^{\alpha x}\ ;\ \ j = 0,1,2,3$$

di mana: - $\vec{a}' = [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_N]$; $a_0, a_1, \ldots, a_N$ adalah koefisien dari polinomial $P_N(x)$.

- $\vec{x}' = [1 \quad x \quad \cdots \quad x^N]$ dengan $1, x, \cdots, x^N$ merupakan variabel polinomial $P_N(x)$.

Koleksi Perpustakaan Universitas Terbuka

Universitas Terbuka

- $j=0$, jika $k(\alpha)\neq 0$ dengan $k(\alpha)=\alpha^3+c_1\alpha^2+c_2\alpha+c_3$ yang diperoleh dari persamaan karakteristik PD, sehingga diperoleh

$$Q_0=\begin{bmatrix} k(\alpha) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ k'(\alpha) & k(\alpha) & 0 & \cdots & 0 \\ k''(\alpha) & 2k'(\alpha) & k(\alpha) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ k^{(n)}(\alpha) & nk^{(n-1)}(\alpha) & (kb)k^{(n-2)}(\alpha) & \cdots & k(\alpha) \end{bmatrix}.$$

- $j=1$, jika $k(\alpha)=0$ dan $k'(\alpha)\neq 0$, sehingga diperoleh

$$Q_1=\begin{bmatrix} k'(\alpha) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ k''(\alpha) & 2k'(\alpha) & 0 & \cdots & 0 \\ k'''(\alpha) & 3k''(\alpha) & 3k'(\alpha) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ k^{(n+1)}(\alpha) & (n+1)k^{(n)}(\alpha) & & \cdots & (n+1)k'(\alpha) \end{bmatrix}.$$

- $j=2$, jika $k(\alpha)=0$, $k'(\alpha)=0$ dan $k''(\alpha)\neq 0$, sehingga diperoleh

$$Q_2=\begin{bmatrix} k''(\alpha) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ k'''(\alpha) & 3k''(\alpha) & 0 & \cdots & 0 \\ k^{iv}(\alpha) & 4k'''(\alpha) & 6k''(\alpha) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ k^{(n+2)}(\alpha) & (n+2)k^{(n+1)}(\alpha) & & \cdots & (n+2)k''(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Koleksi Perpustakaan Universitas Terbuka

Universitas Terbuka

80903.pdf

- $j = 3$, jika $k(\alpha) = 0$, $k'(\alpha) = 0$, $k''(\alpha) = 0$ dan $k'''(\alpha) \neq 0$, sehingga diperoleh

$$Q_3 = \begin{bmatrix} k'''(\alpha) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ k^{iv}(\alpha) & 4k'''(\alpha) & 0 & \cdots & 0 \\ k^{v}(\alpha) & 5k^{iv}(\alpha) & 10k'''(\alpha) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ k^{(n+3)}(\alpha) & (n+3)k^{(n+2)}(\alpha) & & \cdots & (n+3)k'''(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Dari **3.3.1.** dan **3.3.2.**, dapat dilihat bahwa perumusan formula untuk mencari solusi partikulir PD Linear Tak Homogen dengan Koefisien Konstanta untuk **orde dua** sama dengan untuk **orde tiga**. Berdasarkan perumusan tersebut, komponen yang memegang peranan penting dalam menentukan solusi partikulir PD adalah matriks Q_j. Apabila dilakukan telaahan terhadap matriks ini, maka matriks Q_j mempunyai sifat-sifat sebagai berikut.

1. Ukuran matriks Q_j tidak tergantung pada orde PD, tetapi bergantung pada derajat polinomial $P_N(x)$.
2. Matriks Q_j merupakan matriks bujursangkar segitiga bawah.
3. elemen-elemen masing-masing matriks Q_j terdiri dari $k(\alpha)$ dan turunannya, di mana $k(\alpha)$ merupakan persamaan karakteristik PD yang bentuknya tergantung pada orde PD.
4. koefisien konstanta matriks Q_j sesuai dengan rumus binomial atau segitiga Pascal.

Koleksi Perpustakaan Universitas Terbuka

80903.pdf

IV. PEMBAHASAN DAN HASIL

Telaahan, "Metode Matriks untuk Menentukan Solusi Partikulir PD Linear Tak Homogen Orde tinggi dengan Koefisien Konstanta," mengacu pada hasil yang telah diperoleh pada "Metode Matriks untuk menentukan Solusi Partikulir PD Linear Tak Homogen Orde Dua dan Tiga dengan Koefisien Konstanta [ZD];[TD].

Dari [ZD];[TD] diperoleh perumusan untuk menentukan solusi partikulir, yaitu:

$$y_p = \left(\bar{a}^t Q_j^{-1} \bar{x}\right) x^j e^{\alpha x} \;;\; j = 0,1,2 \qquad \ldots \; (4.1)$$

untuk PD Linear Tak Homogen Orde Dua dengan Koefisien Konstanta; dan

$$y_p = \left(\bar{a}^t Q_j^{-1} \bar{x}\right) x^j e^{\alpha x} \;;\; j = 0,1,2,3 \qquad \ldots \; (4.2)$$

untuk PD Linear Tak Homogen Orde Tiga dengan Koefisien Konstanta.

Melihat perumusan formula (4.1) dan (4.2), jelas bahwa matriks bujursangkar segitiga bawah Q_j sangat berperan dalam menentukan solusi partikulir. Berdasarkan sifat-sifat matriks Q_j, kaitan antara orde PD dan matriks Q_j terletak pada elemen-elemen dari matriks Q_j dan bukan pada ukuran matriks Q_j. Elemen-elemen matriks Q_j terdiri dari persamaan karakteristik PD dan turunannya, dengan notasi $k(\alpha)$, $k'(\alpha)$, $k''(\alpha)$ dan seterusnya. Mengacu pada rumusan Metode Matriks untuk menentukan Solusi Partikulir PD Linear Tak Homogen Orde Dua dan Tiga dengan Koefisien Konstanta, kaitan antara Orde PD dan bentuk matriks Q_j adalah sebagai berikut.

Universitas Terbuka

Koleksi Perpustakaan Universitas Terbuka

1. Matriks Q_j diganti dengan Q_0 $(j = 0)$, apabila α bukan merupakan salah satu akar karakteristik dari PD, sehingga rumus solusi partikulir PD berbentuk $y_p = \left(\bar{a}^t Q_0^{-1} \bar{x}\right) e^{\alpha x}$.

2. Apabila α merupakan salah satu akar karakteristik PD dan akar α bermultiplisitas **satu**, maka $k(\alpha) = 0$. Ini berarti bahwa matriks Q_0 tidak mempunyai invers, karena semua unsur-unsur diagonal utamanya sama dengan nol, sehingga berdasarkan **Teorema 3.**, $|Q_0| = 0$. Untuk mendapatkan rumus solusi partikulir yang terdefinisi, diturunkan ruas kiri dan kanan kesamaan (3.3.1) terhadap α satu kali, sehingga diperoleh matriks Q_1 $(j = 1)$ dan rumus solusi partikulir PD berbentuk $y_p = \left(\bar{a}^t Q_1^{-1} \bar{x}\right) x e^{\alpha x}$.

3. Apabila α merupakan salah satu akar karakteristik PD dan akar α bermultiplisitas **dua**, maka $k(\alpha) = 0$ dan $k'(\alpha) = 0$. Ini berarti bahwa matriks Q_0 dan Q_1 tidak mempunyai invers, karena $|Q_0| = 0$ dan $|Q_1| = 0$. Agar rumus solusi partikulir PD terdefinisi, diturunkan ruas kiri dan kanan kesamaan (3.3.1) terhadap α dua kali, sehingga diperoleh matriks Q_2 $(j = 2)$ dan rumus solusi partikulir PD berbentuk $y_p = \left(\bar{a}^t Q_2^{-1} \bar{x}\right) x^2 e^{\alpha x}$.

Untuk PD orde dua, kemungkinan penurunan kesamaan (3.3.1) berhenti sampai butir 3, karena multiplisitas akar-akar karakteristik PD linear tak homogen orde dua dengan koefisien konstanta paling tinggi adalah dua. Tetapi untuk PD linear tak homogen orde tiga dengan koefisien konstanta, kemungkinan penurunan kesamaan (3.3.1) ditambah satu lagi, karena multiplisitas akar-akar karakteristik PD linear tak homogen orde tiga dengan koefisien konstanta paling tinggi adalah tiga, yaitu:

Universitas Terbuka

Koleksi Perpustakaan Universitas Terbuka

80903.pdf

4. Apabila α merupakan salah satu akar karakteristik PD dan akar α bermultiplisitas **tiga**, maka $k(\alpha)=0, k'(\alpha)=0$ dan $k''(\alpha)=0$. Ini berarti bahwa matriks Q_0, Q_1 dan Q_2 tidak mempunyai invers, karena $|Q_0|=0$, $|Q_1|=0$ dan $|Q_2|=0$. Agar rumus solusi partikulir PD terdefinisi, diturunkan ruas kiri dan kanan kesamaan (3.3.1) terhadap α tiga kali, sehingga diperoleh matriks Q_3 $(j=3)$ dan rumus solusi partikulir PD berbentuk $y_p=(\vec{a}\,'Q_3^{-1}\vec{x})x^3e^{\alpha x}$.

Mengacu kepada butir 1, 2, 3, dan 4 di atas, dapat diturunkan rumus solusi partikulir PD untuk PD linear tak homogen orde tinggi dengan koefisien konstanta secara umum sebagai berikut.

$$y_p=(\vec{a}\,'Q_j^{-1}\vec{x})x^je^{\alpha x}\ ;\ j=0,1,2,3,\ldots,n,$$

di mana $k(\alpha)=\alpha^n+c_1\alpha^{n-1}+\cdots+c_{n-1}\alpha+c_n$ yang diperoleh dari persamaan karakteristik PD, $\vec{a}\,'=[a_0\quad a_1\quad\cdots\quad a_N]$; $a_0,a_1,\ldots,a_N$ adalah koefisien dari polinomial $P_N(x)$, $\vec{x}\,'=[1\quad x\quad\cdots\quad x^N]$ dengan $1,x,\cdots,x^N$ merupakan variabel polinomial $P_N(x)$, dan

$$Q_0=\begin{bmatrix} k(\alpha) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ k'(\alpha) & k(\alpha) & 0 & \cdots & 0 \\ k''(\alpha) & 2k'(\alpha) & k(\alpha) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ k^{(n)}(\alpha) & nk^{(n-1)}(\alpha) & (kb)k^{(n-2)}(\alpha) & \cdots & k(\alpha) \end{bmatrix},\ k(\alpha)\neq 0$$

$$Q_1=\begin{bmatrix} k'(\alpha) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ k''(\alpha) & 2k'(\alpha) & 0 & \cdots & 0 \\ k'''(\alpha) & 3k''(\alpha) & 3k'(\alpha) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ k^{(n+1)}(\alpha) & (n+1)k^{(n)}(\alpha) & & \cdots & (n+1)k'(\alpha) \end{bmatrix},\ k(\alpha)=0 \text{ dan } k'(\alpha)\neq 0$$

Koleksi Perpustakaan Universitas Terbuka

80903.pdf

$$Q_2 = \begin{bmatrix} k''(\alpha) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ k'''(\alpha) & 3k''(\alpha) & 0 & \cdots & 0 \\ k^{iv}(\alpha) & 4k'''(\alpha) & 6k''(\alpha) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ k^{(n+2)}(\alpha) & (n+2)k^{(n+1)}(\alpha) & & \cdots & (n+2)k''(\alpha) \end{bmatrix}, \; k(\alpha) = k'(\alpha) = 0 \text{ dan } k''(\alpha) \neq 0$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} k'''(\alpha) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ k^{iv}(\alpha) & 4k'''(\alpha) & 0 & \cdots & 0 \\ k^{v}(\alpha) & 5k^{iv}(\alpha) & 10k'''(\alpha) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ k^{(n+3)}(\alpha) & (n+3)k^{(n+2)}(\alpha) & & \cdots & (n+3)k'''(\alpha) \end{bmatrix}, \; k(\alpha) = k'(\alpha) = k''(\alpha) = 0 \text{ dan } k'''(\alpha) \neq 0$$

$$\vdots$$

Universitas Terbuka

Koleksi Perpustakaan Universitas Terbuka

80903.pdf

V. KESIMPULAN

Perumusan formula Metode Matriks untuk menentukan solusi partikulir Persamaan Diferensial Linear Orde Tinggi dengan Koefisien Konstanta *sama dengan* perumusan formula Metode Matriks untuk menentukan solusi partikulir Persamaan Diferensial Linear Orde Dua dan Tiga dengan Koefisien Konstanta, yaitu

$$y_p = \left(\bar{a}'Q_j^{-1}\bar{x}\right)x^j e^{\alpha x} \;;\; j = 0,1,2,3,\ldots,n. \qquad \ldots\ (4.1)$$

Sehingga, formula (4,1) dapat dijadikan sebagai *formula umum* untuk menentukan solusi partikulir Persamaan Diferensial Linear Orde n ($n \geq 2$) dengan Koefisien Konstanta.

Dalam perumusan formula, matriks Q_j memegang peranan yang penting, sehingga pemahaman mengenai matriks Q_j sangat membantu dalam penggunaan formula.

Keterampilan mengenai paket perangkat lunak untuk bidang Matematika sangat membantu dalam penggunaan formula untuk mencari invers matriks dan operasi perkalian matriks bagi matriks berukuran besar.

Koleksi Perpustakaan Universitas Terbuka

Universitas Terbuka

80903.pdf

VI. DAFTAR PUSTAKA

[AG]. Agarwal, Ravi P. & Gupta, Ramesh C (1993). *Essentials of Ordinary Differential Equations*: McGraw-Hill Book Company Singapore.

[BD]. Boyce, W. E. & DiPrima, R. C (1992). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*: John Wiley & Sons, Inc. New York.

[EK]. Kreyszig, Erwin (1993). *Advanced Engineering Mathematics*: John Wiley & Sons, Inc. New York.

[GW]. Giordano, Frank R & Weir, Maurice D (1991). *Differential Equation (A Modeling Approach)*: Addison-Wesley Publishing Company New York.

[HG]. Gollwitzer, H. Matrix patern and undetermined coefficients. *The College Mathematics Journal* 25 no. 5 (1994); 444 - 448.

[Na]. Nababan, S.M. (1984). *Pendahuluan Persamaan Diferensial Biasa*. Karunika Universitas Terbuka, Jakarta.

[PB] Bugl, Paul (1995). *Differential Equation* (*Matrices and Models*). Prentice Hall International, Inc. New Jersey.

[Ra]. Rao, M. Rama Mohana (1981). *Ordinary Differential Equations*: Edward Arnold. London.

[SL] Seymour, Lipschutz (1981). *Linear Algebra*: Schaum's Outline Series, McGraw-Hill International Book Company, Singapore.

[TD] Tarigan, A.I & Dwi Astuti A. (1998). *Menentukan Solusi Partikulir Persamaan Diferensial Linear Orde Tiga Tak Homogen dengan Koefisien Konstanta Menggunakan Metode Matriks*. Makalah, disampaikan pada seminar "Matematika dan Statistika" FMIPA UT.

[ZD] Dailami, Zulmahdi (1997). *Metode Matriks Untuk Menentukan Solusi Partikulir Persamaan Diferensial Linear Tak-Homogen Orde Dua Dengan Koefisien Konstanta*. Pusat Studi Indonesia, Universitas Terbuka, Jakarta.

Koleksi Perpustakaan Universitas Terbuka

VII. APENDIKS

1. Pandang PD: $y^{(iv)} + 2y''' + y'' = xe^{-x}$.

Di sini $r(x) = xe^{-x}$, dengan $\alpha = -1$ dan $P_N(x) = P_1(x) = x$ (*polinomial berderajat satu*).

Bentuk umum polinomial berderajat satu adalah $P_1(x) = a_0 + a_1 x$. Ini berarti $\vec{a}' = [a_0 \quad a_1] = [0 \quad 1]$.

Persamaan karakteristik PD adalah

$$k(\alpha) = \alpha^4 + 2\alpha^3 + \alpha^2 \text{ dan } k(-1) = (-1)^4 + 2(-1)^3 + (-1)^2 = 0.$$

Karena $k(\alpha) = 0$, turunan pertama $k(\alpha)$ adalah

$$k'(\alpha) = 4\alpha^3 + 6\alpha^2 + 2\alpha \text{ dan } k'(-1) = 4(-1)^3 + 6(-1)^2 + 2(-1) = 0.$$

Karena $k'(\alpha) = 0$, turunan kedua $k(\alpha)$ adalah

$$k''(\alpha) = 12\alpha^2 + 12\alpha + 2 \text{ dan } k'''(-1) = 12(-1)^2 + 12(-1) + 2 = 2 \neq 0.$$

Maka rumus solusi partikulir PD adalah

$$y_p = \left(\vec{a}' Q_2^{-1} \vec{x}\right) x^2 e^{bx},$$

dengan $Q_2 = \begin{bmatrix} k''(\alpha) & 0 \\ k'''(\alpha) & 3k''(\alpha) \end{bmatrix}$ dan $\omega = 0$.

Selanjutnya, $k'''(\alpha) = 24\alpha + 12$ dan $k'''(-1) = 24(-1) + 12 = -12$.

Universitas Terbuka

Koleksi Perpustakaan Universitas Terbuka

Jadi $Q_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -12 & 3.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -12 & 6 \end{bmatrix}$ dan $Q_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$, sehingga solusi partikulir PD adalah

$$y_p = \left(\vec{a}\,'Q_2^{-1}\vec{x}\right)x^2 e^{-x} = \left([0 \quad 1]\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}\right)x^2 e^{-x}$$

$$= \left([1 \quad \tfrac{1}{6}]\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}\right)x^2 e^{-x} = \left(1 + \tfrac{1}{6}x\right)x^2 e^{-x}.$$

2. Pandang PD: $y^{(iv)} - y'' = x \sin x$.

Di sini $r(x) = x \sin x = \operatorname{Im}\left[xe^{ix}\right]$ dan $\vec{a}\,' = [a_0 \quad a_1] = [0 \quad 1]$.

Persamaan karakteristik PD adalah

$k(\alpha) = \alpha^4 - \alpha^2$ dan $k(i) = i^4 - i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^4 - \left(\sqrt{-1}\right)^2 = 1 + 1 = 2 \neq 0$ dan

$k'(\alpha) = 4\alpha^3 - 2\alpha$ dan $k'(\alpha) = 4i^3 - 2i = -4i - 2i = -6i$

Sehingga $Q_0 = \begin{bmatrix} k(\alpha) & 0 \\ k'(\alpha) & k(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6i & 2 \end{bmatrix}$ dan $Q_0^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2}i & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Jadi, solusi partikulir PD adalah

$$y_p = \operatorname{Im}\left[\left(\vec{a}\,'Q_0^{-1}\vec{x}^{-1}\right)e^{ix}\right] = \operatorname{Im}\left[[0 \quad 1]\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2}i & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}e^{ix}\right]$$

$$= \operatorname{Im}\left[[\tfrac{3}{2}i \quad \tfrac{1}{2}]\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}e^{ix}\right] = \operatorname{Im}\left[\left(\tfrac{3}{2}i + \tfrac{1}{2}x\right)e^{ix}\right] = \operatorname{Im}\left[\left(\tfrac{3}{2}i + \tfrac{1}{2}x\right)(\cos x + i \sin x)\right]$$

$$= \operatorname{Im}\left[\tfrac{3}{2}i\cos x - \tfrac{3}{2}\sin x + \tfrac{1}{2}x\cos x + \tfrac{1}{2}ix\sin x\right]$$

$$= \tfrac{3}{2}\cos x + \tfrac{1}{2}x \sin x.$$

Koleksi Perpustakaan Universitas Terbuka

80903.pdf

RIWAYAT HIDUP PENELITI

***Ketua Peneliti*:**

Nama	:	Drs. Zulmahdi Dailami
N I P	:	131643904
Unit	:	Jurusan Matematika FMIPA – UT
Tempat / Tanggal Lahir	:	Tanjung Alam / 06 April 1957
Pendidikan	:	S1, Matematika, ITB, 1985
Pengalaman Penelitian	:	Metode Matriks Untuk Menentukan Solusi Partikulir (Khusus) Persamaan Diferensial Linear Orde Dua Tak Homogen Dengan Koefisien Konstanta.

***Anggota Peneliti*:**

Nama	:	Dra. Asmara Iriani Tarigan
N I P	:	132174679
Unit	:	Jurusan Matematika FMIPA – UT
Tempat / Tanggal Lahir	:	Biak, 01 Januari 1966
Pendidikan	:	S1, Matematika,
Pengalaman Penelitian	:	-

Nama	:	Dra. Dwi Astuti Aprijani
N I P	:	132205572
Unit	:	Jurusan Matematika FMIPA – UT
Tempat / Tanggal Lahir	:	Probolinggo, 15 April 1967
Pendidikan	:	S1, Matematika,
Pengalaman Penelitian	:	-

Koleksi Perpustakaan Universitas Terbuka

Universitas Terbuka

80903.pdf

UCAPAN TERIMA KASIH

Sehubungan dengan selesainya penulisan laporan ini, Tim Peneliti mengucapkan banyak terima kasih kepada pihak-pihak yang sudah membantu kelancaran penyelesaian penelitian ini.

Pertama-tama Tim Peneliti mengucapkan terima kasih kepada Dekan FMIPA Universitas Terbuka, Dr. Djati Kerami yang sudah meluangkan waktunya dalam memberikan kritik dan saran untuk penelitian ini.

Selain itu juga Tim Peneliti mengucapkan banyak terima kasih kepada Kepala Lembaga Penelitian, Dr. WBP Simanjuntak dan Kepala Pusat Studi Indonesia, Dr. Tian Belawati yang telah memberi kesempatan kepada Tim Peneliti untuk mengikuti seleksi pembiayaan penelitian bidang ilmu di Universitas Terbuka ini.

Tidak lupa juga Tim Peneliti mengucapkan terima kasih kepada rekan-rekan di Jurusan Matematika FMIPA UT yang sudah membantu penelitian ini berupa kritik dan saran sehingga penelitian dan laporannya dapat diselesaikan.

Universitas Terbuka

Koleksi Perpustakaan Universitas Terbuka