LAPORAN PENELITIAN

METODE MATRIKS UNTUK MENENTUKAN SOLUSI PARTIKULIR (KHUSUS) PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE DUA TAK HOMOGEN DENGAN KOEFISIEN KONSTANTA

Oleh :

Drs. ZULMAHDI DAILAMI

Universitas Terbuka

Lembaga Penelitian

Pusat Studi Indonesia

1 9 9 7

Lembar Pengesahan
Laporan Penelitian PSI-UT

1. a.	Judul Penelitian	:	Metode Matriks untuk Menentukan Solusi Partikulir (Khusus) Persamaan Diferensial Linear Orde Dua Tak Homogen dengan Koefisien Konstanta.
b.	Bidang Penelitian	:	MATEMATIKA
2.	Ketua Peneliti		
a.	Nama lengkap dan gelar	:	Drs. Zulmahdi Dailami
b.	NIP	:	131-643-904
c.	Golongan kepangkatan	:	III/c
d.	Jabatan Fungsional	:	Lektor Muda
e.	Fakultas/Unit Kerja	:	FMIPA
3.	Anggota tim peneliti		
a.	Jumlah anggota	:	0 orang
4.	Lama Penelitian	:	5 bulan
5.	Biaya Penelitian	:	Rp 3.516.000,- (*tiga juta lima ratus enam belas ribu rupiah*).

Pondok Cabe, 4 Agustus 1997

Mengetahui,
Dekan FMIPA

Dr. Djati Kerami
NIP 130 422 587

Ketua Peneliti

Drs. Zulmahdi Dailami
NIP 131 643 904

Menyetujui,
Kepala PSI-UT

Dr. Tian Belawati
NIP 131 569 974

Menyetujui,
Ketua Lembaga Penelitian UT

WBP Simanjuntak, MEd, PhD
130 212 017

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Pendekatan tradisional dalam penentuan solusi khusus untuk PD Linear Orde Dua Tak Homogen dengan Koefisien Konstanta adalah dengan menggunakan metoda Transformasi Laplace, Variasi Parameter dan Koefisien Tak Tentu.

Metoda Matriks adalah suatu metoda alternatif untuk mencari solusi partikulir PD Linear Orde Dua Tak Homogen dengan Koefisien Konstanta yang secara sederhana dapat dijelaskan dengan menggunakan konsep-konsep Matriks, Linearitas, Identitas Euler dan sifat-sifat solusi PD Linear Orde Dua Tak Homogen Dengan Koefisien Konstanta.

I. PENDAHULUAN.

1.1. Latar Belakang.

Sebagaimana diketahui, persamaan diferensial (*PD*) berperan dalam pemodelan matematis untuk masalah-masalah dunia nyata (*real world*), tidak hanya dalam sains dan teknologi, tetapi juga dalam bidang-bidang ilmu sosial, seperti ekonomi, psikologi dan demografi [5].

Materi PD bagi mahasiswa matematika merupakan suatu kendaraan yang baik untuk membawa mahasiswa ke arah pengertian interelasi antara Matematika Murni (*Pure Mathematics*) dan sains, teknologi dan ilmu-ilmu sosial [9]. Sebagai ilustrasi suatu model matematis yang menyatakan hubungan antara kecepatan perubahan banyaknya jumlah radioaktif dan waktu diekspresikan oleh PD:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -kx(t) \text{ [6]}. \qquad \text{(i-1)}$$

Begitu juga, untuk model pertumbuhan populasi yang memperhatikan pengaruh sumber daya alam dinyatakan secara matematis dalam bentuk PD:

$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2 \qquad \text{(i-2)}$$

PD (i-2) dikenal sebagai Hukum Logistik [6]. PD (i-1) dan (i-2) disebut PD Orde satu.

Apabila diperhatikan kedua model di atas (i-1) dan (i-2), ternyata PD tersebut hanya menggambarkan perilaku sistem permasalahan. Selanjutnya, kebutuhan informasi lain yang diperlukan adalah mencari perilaku penyelesaian hampiran masalah. Untuk mendapatkan hal ini, dilakukan penurunan atau manipulasi terhadap PD di atas secara matematis. Hasil penurunan atau manipulasi ini berbentuk fungsi biasanya disebut **solusi**. Untuk menentukan solusi dari suatu PD dibutuhkan suatu **metode** mengenai sistematika pengerjaan untuk mendapatkan solusi. Sebagai contoh, salah satu metode untuk menentukan solusi PD (i-1) adalah metode **Pemisahan Variabel** yang solusinya adalah

$$x(t) = C e^{-kt}. \tag{i-3}$$

Setelah diperoleh solusi PD (i-1), dengan metode Pemisahan Variabel, yang diekspresikan oleh fungsi (i-3), terlihat bahwa fungsi (i-3) memberikan informasi yang lebih lengkap dan jelas dalam hal hubungan antara banyaknya jumlah radioaktif $x(t)$ dan waktu t. Solusi (i-3) menggambarkan perilaku penyelesaian hampiran dari PD (i-1).

Pada masalah yang lebih sedikit rumit, bentuk model yang diperlukan berbentuk PD dengan orde yang lebih tinggi, seperti PD linear orde dua tak homogen dengan koefisien konstanta. Hal ini yang akan menjadi pokok pembahasan selanjutnya.

1.2. Batasan dan Perumusan Masalah.

Pandang PD:

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x). \tag{ii}$$

PD (ii) disebut **PD Linear tak Homogen Orde Dua**. Apabila dipilih $f(x) = p$ dan $g(x) = q$, dengan p dan q konstanta sebarang, maka PD (ii) menjadi:

$$y'' + py' + qy = r(x). \tag{iii}$$

PD (iii) disebut **PD Linear tak Homogen Orde Dua dengan Koefisien Konstanta**. Kemudian, apabila dipilih $r(x) = 0$, sehingga

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{iv}$$

PD (iv) disebut **PD Linear Homogen Orde Dua dengan Koefisien Konstanta.**

Sekarang andaikan $y_c(x)$ solusi PD (iv) dan $y_p(x)$ solusi PD (iii), dapat diperlihatkan $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$ juga merupakan solusi PD (iii) ([2];[3];[6]). Kemudian, $y_c(x)$, $y_p(x)$ dan $y(x)$ secara berturut-turut disebut sebagai solusi **homogen**, solusi **partikulir** dan solusi **umum** dari PD (iii).

Selanjutnya, batasan permasalahan pada penelitian ini adalah mengenai masalah mencari solusi partikulir y_p dari PD linear tak homogen orde dua dengan koefisien konstanta. Pada umumnya, metode-metode yang sudah sangat dikenal secara tradisional untuk menentukan solusi partikulir y_p adalah metode **Transformasi Laplace**, **Variasi Parameter** dan **Koefisien Tak Tentu** ([1];[6]). Pada metode Transformasi Laplace dibutuhkan suatu persyaratan yang disebut dengan **syarat awal** dan juga pengetahuan tentang rumus-rumus transformasi yang cukup banyak. Sedangkan pada metode Koefisien tak Tentu diperlukan solusi PD homogen (iv) terlebih dahulu. Disamping itu penyelesaiannya cukup panjang dan dibutuhkan ketelitian yang cukup tinggi, karena banyak berhubungan dengan konstanta-konstanta yang tidak diketahui.

Berbicara dalam hal metode untuk menyelesaikan suatu permasalahan, metode-metode yang diciptakan/ditemukan tidak luput mempunyai kelemahan-kelemahan, seperti yang telah diungkapkan di atas. Tetapi patut disyukuri bahwa, Matematikawan tidak cepat puas dengan metode atau formula atau rumus yang sudah ada. Mereka selalu mencari metode atau formula alternatif yang lebih efisien untuk menyelesaikan suatu permasalahan dan tidak terkecuali metode untuk mencari solusi partikulir PD (iii).

Herman Gollwitzer, Drexel University, Philadelphia (1994) telah menemukan suatu metode alternatif untuk mencari solusi partikulir PD (iii) bentuk sederhana, yang dikenal dengan **metode Matriks** [1]. Selanjutnya, perlu dilakukan telaahan:

- bagaimana keterkaitan konsep matriks, linearitas dan identitas Euler untuk membentuk metode ini,
- batasan-batasan apa saja yang harus dipenuhi fungsi $r(x)$ di (iii) untuk mencari solusi partikulir, sehingga metode ini dapat digunakan, dan
- apakah dapat dibuat bentuk formula atau rumus yang lebih umum untuk kasus-kasus bentuk fungsi $r(x)$.

1.3. Tujuan Penelitian.

Menurunkan **metode Matriks** dari metode Koefisien tak Tentu, dengan menggunakan konsep dasar Matriks, linearitas dan identitas Euler.

1.4. Manfaat Hasil Penelitian.

Karena aplikasi PD banyak dipakai pada bidang-bidang ilmu lainnya, seperti, sains, bidang teknik dan ilmu-ilmu sosial, dan tak kalah pentingnya mengingat perkembangan perangkat lunak matematika termasuk materi Matriks, maka metode Matriks ini diharapkan menjadi suatu metode alternatif yang lebih sederhana dan mudah untuk mencari solusi partikulir pada PD Linear Orde Dua Tak Homogen dengan Koefisien Konstanta.

Selain manfaat aplikasi tersebut akan diperoleh pula manfaat:

- pengalaman melakukan penelitian,
- studi dan pengembangan bidang ilmu matematika, dan
- peningkatan kemampuan dalam "proses pembelajaran" bidang matematika, khususnya, senagai staf akademik di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Terbuka.

II. METODE PENELITIAN.

1. Studi Journal yang berkaitan dengan permasalahan.
2. Studi literatur tentang metode Koefisien tak Tentu, konsep Matriks, Polinomial dan identitas Euler.
3. Melakukan penurunan metode Matriks dari metode Koefisien tak Tentu.
4. Membandingkan solusi partikulir antara metode Matriks dan metode Koefisien tak Tentu melalui beberapa contoh permasalahan.
5. Pembuatan Laporan.

III. TINJAUAN PUSTAKA.

3.1. Metode Koefisien tak Tentu.

Perumusan formula untuk mencari solusi partikulir dengan metode Matriks ini diturunkan dari metode Koefisien tak Tentu. Pada metode Koefisien Tak Tentu sering menggunakan tabel dalam pengandaian untuk menentukan solusi partikulirnya.:

Pandang PD (iii) dan (iv). Selanjutnya, untuk menentukan solusi partikulir dengan metode Koefisien tak Tentu, dalam pengandaiannya kita perhatikan kasus-kasus sebagai berikut ([2];[6]):

$r(x) = P_n(x)$ polinom berderajat n. Solusi partikulir y_p diandaikan sebagai berikut:	
a. $y_p = A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n$; dengan $A_0, A_1, \ldots, A_n$ konstanta.	apabila $m = 0$ ***bukan*** akar dari pers. karakteristik $m^2 + pm + q = 0$.
b. $y_p = x(A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n)$, dengan $A_0, A_1, \ldots, A_n$ konstanta.	apabila $m = 0$ merupakan salah satu akar dari pers. Karakteristik $m^2 + pm + q = 0$.

Tabel 1.

$r(x) = P_n(x)e^{bx}$. $g(x)$ merupakan perkalian suatu polinom berderajat n dengan fungsi e^{bx}, b real. Solusi partikulir y_p diandaikan sebagai berikut:	
a. $y_p = (A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n)e^{bx}$; dengan $A_0, A_1, \ldots, A_n$ konstanta.	apabila $m = b$ **bukan** akar dari pers. karakteristik $m^2 + pm + q = 0$.
b. $y_p = x(A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n)e^{bx}$; dengan $A_0, A_1, \ldots, A_n$ konstanta.	apabila $m = b$ merupakan salah satu akar dari pers. $m^2 + pm + q = 0$.

Tabel 2.

$r(x) = P_n(x)e^{bx}\cos\omega x$ atau $g(x) = P_n(x)e^{bx}\sin\omega x$, dengan $P_n(x)$ polinom berderajat n. Solusi partikulir y_p diandaikan sebagai berikut:	
a. $y_p = e^{bx}\{(A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n)\cos\omega x + (B_0 + B_1x + \cdots + B_nx^n)\sin\omega x\}$; dengan $A_0, \ldots, A_n$ dan $B_0, \ldots, B_n$ konstanta.	apabila $b + \omega i$ **bukan** akar kompleks dari persamaan $k^2 + pk + q = 0$.
b. $y_p = xe^{bx}\{(A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n)\cos\omega x + (B_0 + B_1x + \cdots + B_nx^n)\sin\omega x\}$; dengan $A_0, \ldots, A_n$ dan $B_0, \ldots, B_n$ konstanta.	apabila $b + \omega i$ akar kompleks dari persamaan $k^2 + pk + q = 0$.

Tabel 3.

Sistematika untuk mencari solusi partikulir dengan metode Koefisien tak Tentu, dapat dilihat dari beberapa contoh dibawah ini.

Contoh 1.

Pandang PD: $y'' - y = 4x^3$. Karena 0 **bukan** merupakan akar karakteristik dari PD homogen $y'' - y = 0$. Pengandaian untuk solusi partikulir digunakan Tabel 1 bagian **a**, yaitu $y_p = (A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3)$. Maka $y_p' = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2$ dan $y_p'' = 2A_2 + 6A_3x$. Substitusi y''_p dan y_p ke PD, diperoleh:

$$(2A_2 + 6A_3x) - \left(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3\right) = 4x^3$$

atau

$$(-A_0 + 2A_2) + (-A_1 + 6A_3)x - A_2x^2 - A_3x^3 = 4x^3.$$

Dari kesamaan di atas didapat 4 (*empat*) persamaan, yakni: $-A_0 + 2A_2 = 0$, $-A_1 + 6A_3 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = -4$. Sehingga diperoleh: $A_0 = 0$, $A_1 = -24$, $A_2 = 0$ dan $A_3 = -4$. Jadi, solusi partikulirnya adalah $y_p = -24x - 4x^3$. ■

Contoh 2.

Pandang PD: $y'' - y' = 4x^3$. Karena 0 merupakan akar karakteristik dari PD homogen $y'' - y' = 0$. Pengandaian untuk solusi partikulir digunakan Tabel 1 bagian b, yaitu $y_p = x\left(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3\right)$ atau $y_p = A_0x + A_1x^2 + A_2x^3 + A_3x^4$.

Maka $y_p' = A_0 + 2A_1x + 3A_2x^2 + 4A_3x^3$ dan $y_p'' = 2A_1 + 6A_2x + 12A_3x^2$.

Substitusi y''_p dan y_p' ke PD, diperoleh:

$$\left(2A_1 + 6A_2x + 12A_3x^2\right) - \left(A_0 + 2A_1x + 3A_2x^2 + 4A_3x^3\right) = 4x^3$$

atau

$$\left(-A_0 + 2A_2\right) + \left(-2A_1 + 6A_2\right)x + \left(-3A_2 + 12A_3\right)x^2 - 4A_3x^3 = 4x^3.$$

Dari kesamaan di atas didapat 4 (empat) persamaan, yakni: $-A_0 + 2A_2 = 0$, $-2A_1 + 6A_2 = 0$, $-3A_2 + 12A_3 = 0$, $-4A_3 = 4$. Sehingga diperoleh: $A_0 = -24$, $A_1 = -12$, $A_2 = -4$ dan $A_3 = -1$. Jadi, solusi partikulirnya adalah $y_p = -24x - 12x^2 - 4x^3 - x^4$. ■

Contoh 3.

Pandang PD: $y'' - y = 4xe^{3x}$. Disini $\alpha = 3$ dan persamaan karakteristik dari PD homogen $y'' - y = 0$ adalah $m^2 - 1 = 0$, sehingga akar-akar karakteristiknya adalah $m_1 = -1$ dan $m_2 = 1$. Jadi, 3 **bukan** salah satu akar karakteristik dari PD $y'' - y = 0$. Pengandaian untuk solusi partikulir digunakan Tabel 2 bagian a, yaitu $y_p = \left(A_0 + A_1x\right)e^{3x}$.

Selanjutnya, ditentukan nilai-nilai A_0 dan A_1 Untuk menentukan A_0 dan A_1, substitusikan y''_p dan y_p ke PD $y'' - y = 4xe^{3x}$.

Turunan **pertama** y_p

$$y_p' = A_1e^{3x} + 3\left(A_0 + A_1x\right)e^{3x} = \left(3A_0 + A_1 + 3A_1x\right)e^{3x}$$

dan turunan **kedua** y_p

$$y_p'' = 3A_1e^{3x} + 3(3A_0 + A_1 + 3A_1x)e^{3x} = (9A_0 + 6A_1 + 9A_1x)e^{3x}.$$

Substitusikan y_p'' dan y_p ke PD: $y'' - y = 4xe^{3x}$, diperoleh:

$$(9A_0 + 6A_1 + 9A_1x)e^{3x} - \left[(A_0 + A_1x)e^{3x}\right] = 4xe^{3x}. \qquad (*)$$

y_p dikatakan solusi partikulir PD $y'' - y = 4xe^{3x}$, apabila persamaan (*) dipenuhi. Kemudian dengan melakukan manipulasi aljabar diperoleh:

$$(8A_0 + 6A_1 + 8A_1x)e^{3x} = 4xe^{3x}$$

atau

$$(8A_0 + 6A_1)e^{3x} + 8A_1xe^{3x} = 0.e^{3x} + 4xe^{3x}.$$

Dari kesamaan diatas diperoleh 2 persamaan dengan 2 konstanta yang tidak diketahui, yaitu

$$8A_0 + 6A_1 = 0 \quad \text{dan} \quad 8A_1 = 4.$$

Sehingga diperoleh:

$$A_0 = -\frac{3}{8} \quad \text{dan} \quad A_1 = \frac{1}{2}.$$

Jadi, solusi partikulir adalah:

$$y_p = \left(-\frac{3}{8} + \frac{1}{2}x\right) e^{3x}.$$

Contoh 4.

Pandang PD: $y'' - y = 4x^2e^{-x}$. Karena -1 merupakan akar karakteristik dari PD homogen $y'' - y = 0$. Pengandaian untuk solusi partikulir digunakan Tabel 2 bagian **b**, yaitu

$$y_p = x(A_0 + A_1x + A_2x^2)e^{-x} = \left(A_0x + A_1x^2 + A_2x^3\right)e^{-x}$$

Maka

$$\begin{aligned} y_p' &= \left(A_0 + 2A_1x + 3A_2x^2\right)e^{-x} - \left(A_0x + A_1x^2 + A_2x^3\right)e^{-x} \\ &= \left(A_0 + (-A_0 + 2A_1)x + (-A_1 + 3A_2)x^2 - A_2x^3\right)e^{-x} \end{aligned}$$

dan

$$y''_p = \left((-A_0 + 2A_1) + 2(-A_1 + 3A_2)x - 3A_2x^2\right)e^{-x}$$
$$-\left(A_0 + (-A_0 + 2A_1)x + (-A_1 + 3A_2)x^2 - A_2x^3\right)e^{-x}$$
$$= \left((-2A_0 + 2A_1) + (A_0 - 4A_1 + 6A_2)x + (A_1 - 6A_2)x^2 + A_2x^3\right)e^{-x}$$

Substitusi y''_p dan y_p ke PD, diperoleh:

$$\left((-2A_0 + 2A_1) + (A_0 - 4A_1 + 6A_2)x + (A_1 - 6A_2)x^2 + A_2x^3\right)e^{-x}$$
$$-\left(A_0x + A_1x^2 + A_2x^3\right)e^{-x} = 4x^2e^{-x}$$

atau $\left((-2A_0 + 2A_1) + (-4A_1 + 6A_2)x - 6A_2x^2\right)e^{-x} = 4x^2e^{-x}$.

Dari kesamaan di atas didapat 3 (*tiga*) persamaan, yakni:

$$-2A_0 + 2A_1 = 0,\quad -4A_1 + 6A_2 = 0 \text{ dan } 6A_2 = 4,$$

sehingga diperoleh: $A_0 = -1$, $A_1 = -1$ dan $A_2 = -\frac{2}{3}$. Jadi, solusi partikulirnya adalah

$$y_p = x\left(-1 - x - \tfrac{2}{3}x^2\right)e^{-x} \text{ atau } y_p = \left(-x - x^2 - \tfrac{2}{3}x^3\right)e^{-x}.$$

Contoh 5.

Pandang PD $y'' - y = 4x\cos(\omega x)$. Di sini $b = 0$ dan $\omega = 1$ dan akar-akar karakteristik dari PD homogen $y'' - y = 0$ adalah $m_1 = -1$ dan $m_2 = 1$. Karena i bukan merupakan akar-akar karakteristik PD homogen, maka untuk mencari solusi khusus PD diatas kita gunakan pengandaian yang terdapat pada Tabel 3 bagian a, yakni

$$y_p = (A_0 + A_1x)\cos\omega x + (B_0 + B_1x)\sin\omega x.$$

Maka

$$y_p' = -A_0\omega\sin\omega x + A_1\cos\omega x - A_1\omega x\sin\omega x + B_0\omega\cos\omega x$$
$$+ B_1\sin\omega x + B_1\omega x\sin\omega x$$
$$= -(A_0\omega + A_1\omega x)\sin\omega x + A_1\cos\omega x + (B_1 + B_1\omega x)\sin\omega x + B_0\omega\cos\omega x$$

dan

$$y_p'' = \left(-A_0\omega^2 + 2B_1\omega\right)\cos\omega x - A_1\omega^2x\cos\omega x - \left(2A_1\omega + B_0\omega^2\right)\sin\omega x$$
$$-B_1\omega^2x\sin\omega x.$$

Substitusi ke PD, diperoleh:

$$\left\{\left(-A_0\omega^2+2B_1\omega\right)cos\,\omega x-A_1\omega^2 x\,cos\,\omega x-\left(2A_1\omega+B_0\omega^2\right)sin\,\omega x\right.$$
$$\left.-B_1\omega^2 x\,sin\,\omega x\right\}-\left\{\left(A_0+A_1x\right)cos(\omega x)+\left(B_0+B_1x\right)sin\,\omega x\right\}=4x\,cos\,\omega x$$

atau

$$\left(-A_0\omega^2-A_0+2B_1\omega\right)\cos\omega x+\left(-A_1\omega^2-A_1\right)x\cos\omega x$$
$$+\left(-2A_1\omega-B_0\omega^2-B_0\right)\sin\omega x+\left(-B_1\omega^2-B_1\right)x\sin\omega x=4x\cos\omega x.$$

Selanjutnya, diperoleh 4 persamaan dan 4 konstanta yang tidak diketahui, yakni:

$$\begin{cases}-A_0\omega^2-A_0+2B_1\omega=0\\-A_1\omega^2-A_1=4\\-2A_1\omega-B_0\omega^2-B_0=0\\-B_1\omega^2-B_1=0.\end{cases}$$

Sehingga didapat:

$$A_0=0;\ A_1=-\frac{4}{\omega^2+1};\ B_0=\frac{8\omega}{\left(\omega^2+1\right)^2}\ \text{dan}\ B_1=0.$$

Jadi,

$$y_p=\frac{8\omega}{\left(\omega^2+1\right)^2}sin\,\omega x-\frac{4}{\omega^2+1}x\,cos\,\omega x$$
$$=\frac{4}{\left(\omega^2+1\right)^2}\left\{2\omega\,sin\,\omega x-\left(\omega^2+1\right)x\,cos\,\omega x\right\}.$$

Contoh 3.

Pandang PD $y''-2y'+2y=e^x\sin x$. Di sini $b=1$ dan $\omega=1$ dan akar-akar karakteristik dari PD homogen $y''-2y'+2y=0$ adalah $m_1=1+i$ dan $m_2=1-i$. Karena $1+i$ merupakan salah satu akar-akar karakteristik PD homogen, maka untuk mencari solusi khusus PD diatas digunakan pengandaian yang terdapat pada Tabel 3 bagian **b**, yakni

$$y_p=xe^x\left(A_0\cos x+B_0\sin x\right)=e^x\left(A_0x\cos x+B_0x\sin x\right)$$

dan

$$
\begin{aligned}
y_p' &= e^x\left(A_0x\cos x + B_0x\sin x\right) + e^x\left(A_0\cos x - A_0x\sin x + B_0\sin x + B_0x\cos x\right)\\
&= e^x\left\{\left((A_0 + B_0)x + A_0\right)\cos x + \left((B_0 - A_0)x + B_0\right)\sin x\right\}\\
&= y_p + e^x\left\{\left(B_0x + A_0\right)\cos x + \left(-A_0x + B_0\right)\sin x\right\}.
\end{aligned}
$$

Penurunan y_p' dan menggunakan hubungan di atas, diperoleh

$$
\begin{aligned}
y_p'' = {} & y_p' + e^x\left\{\left(B_0x + A_0\right)\cos x + \left(-A_0x + B_0\right)\sin x\right\} +\\
& e^x\left\{= \left(B_0x + A_0\right)\sin x + B_0\cos x + \left(-A_0x + B_0\right)\cos x - A_0\sin x\right\}\\
= {} & y_p' + \left(y_p' - y_p\right) + e^x\left(-B_0x\sin x - A_0x\cos x\right) + e^x\left(-2A_0\sin x + 2B_0\cos x\right)\\
= {} & 2y_p' - y_p - y_p + e^x\left(2B_0\cos x - 2A_0\sin x\right)\\
= {} & 2y_p' - 2y_p + e^x\left(2B_0\cos x - 2A_0\sin x\right)
\end{aligned}
$$

Substitusi ke PD diperoleh

$$2y_p' - 2y_p + e^x\left(2B_0\cos x - 2A_0\sin x\right) - 2y_p' + 2y_p = e^x\sin x$$

atau

$$e^x\left(2B_0\cos x - 2A_0\sin x\right) = e^x\sin x\,.$$

Pencoretan e^x menghasilkan

$$2B_0\cos x - 2A_0\sin x = \sin x\,.$$

Penyamaan koefisien-koefisien dari $\sin x$ atau $\cos x$ didapat $A_0 = -\frac{1}{2}$ dan $B_0 = 0$. Jadi, $y_p = -\frac{1}{2}xe^x\cos x$.

3.2. Identitas EULER

Dengan mengunakan rumus Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad (1)$$

bentuk polar bilangan kompleks z dapat diubah menjadi

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}\,.$$

Penulisan $z = re^{i\theta}$ merupakan bentuk eksponen dari bilangan kompleks z. Sehingga dengan pengandaian $z = x + iy$ dengan x bagian real dari z (x = Re[z]) dan y bagian imaginer dari z (y = Im[z]), maka

$$
\begin{aligned}
x + iy &= r(\cos\theta + i\sin\theta)\\
&= r\cos\theta + ir\sin\theta
\end{aligned}
$$

atau

$$x = r\cos\theta \quad \text{dan} \quad y = r\sin\theta.$$

Dengan kata lain,

$$\text{Re}\left[re^{i\theta}\right] = r\cos\theta \quad \text{atau} \quad \text{Re}\left[e^{i\theta}\right] = \cos\theta \tag{2}$$

dan

$$\text{Im}\left[re^{i\theta}\right] = r\sin\theta \quad \text{atau} \quad \text{Im}\left[e^{i\theta}\right] = \sin\theta. \tag{3}$$

Selanjutnya, kompleks sekawan dari z adalah

$$\begin{aligned} \bar{z} &= r(\cos\theta - i\sin\theta) \\ &= r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \\ &= re^{-i\theta} \end{aligned}$$

Catatan: *Rumus Euler* dapat dibuktikan dengan menggunakan *deret Maclaurin* untuk. $\cos\theta$, $\sin\theta$ dan $e^{i\theta}$.

IV. PEMBAHASAN DAN HASIL.

Perumusan formula solusi partikulir dengan metode Matriks pada penelitian ini, pembahasannya, lebih khusus, dibatasi untuk permasalahan bentuk-bentuk fungsi $r(x)$ sebagai berikut:

- $r(x) = P_n(x)\, e^{\alpha x}$,
- $r(x) = P_n(x)$, dan
- $r(x) = P_n(x) e^{bx} \cos \omega x$ atau $g(x) = P_n(x)\, e^{bx} \sin \omega x$,

4.1. Bentuk $r(x) = P_n(x)\, e^{\alpha x}$

$r(x) = P_n(x)\, e^{\alpha x}$, maka PD (iii) ditulis sebagai

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = P_n(x) e^{\alpha x} \tag{4}$$

dengan $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. PD (2) sering ditulis dalam bentuk operator diferensial L, yakni

$$L(y) = P_n(x)\, e^{\alpha x}, \tag{5}$$

dengan $L = D^2 + pD + q$, dimana $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$ dan $D = \frac{d}{dx}$.

$r(x) = P_n(x)\, e^{\alpha x}$ ditulis dalam bentuk perkalian matriks, diperoleh

$$r(x) = P_n(x)\, e^{\alpha x} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}}_{P_n(x)} e^{\alpha x} \tag{6}$$

Untuk bentuk $r(x) = P_n(x)\, e^{\alpha x}$, pilih pengandaian solusi partikulir dengan Metode Koefisien tak Tentu di Tabel 2 bagian **a**, yaitu

$$y_p = (A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n) e^{\alpha x}. \tag{7}$$

Selanjutnya, dicari nilai-nilai $A_0, A_1, \ldots, A_n$, sehingga y_p memenuhi PD (4). y_p (*di* (7)) ditulis dalam bentuk perkalian matriks adalah

$$y_p = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} e^{\alpha x} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\alpha x} \\ x e^{\alpha x} \\ \vdots \\ x^n e^{\alpha x} \end{bmatrix} \qquad (8)$$

y_p memenuhi PD (4), berarti

$$L\left(y_p\right) = P_n(x) e^{\alpha x}$$

atau

$$L\left(\begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\alpha x} \\ x e^{\alpha x} \\ \vdots \\ x^n e^{\alpha x} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} e^{\alpha x} .$$

Karena sifat linear dari operator diferensial L, diperoleh

$$\begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L\left(e^{\alpha x}\right) \\ L\left(x e^{\alpha x}\right) \\ \vdots \\ L\left(x^n e^{\alpha x}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} e^{\alpha x} . \qquad (9)$$

Pandang (9), dengan menggunakan operator diferensial, diperoleh

$$L(e^{\alpha x}) = p(\alpha)\ e^{\alpha x} , \qquad (10)$$

dengan $k(\alpha) = \alpha^2 + p\alpha + q$ (*lihat Apendiks*); dan selanjutnya didapat:

$$L(x e^{\alpha x}) = \left(k'(\alpha) + k(\alpha)x\right) e^{\alpha x} ,$$

$$L(x^2 e^{\alpha x}) = \left(k''(\alpha) + 2k'(\alpha)x + k(\alpha)x^2\right) e^{\alpha x}$$

$$\vdots$$

$$L(x^n e^{\alpha x}) = \left(k^{(n)}(\alpha) + n k^{(n-1)}(\alpha)x + \cdots + n k'(\alpha)x^{n-1} + k(\alpha)x^n\right) e^{\alpha x}$$

Substitusi yang diperoleh di atas ke (9), menghasilkan

$$\begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k(\alpha)e^{\alpha x} \\ \left(k'(\alpha) + k(\alpha)x\right)e^{\alpha x} \\ \vdots \\ \left(k^{(n)}(\alpha) + n k^{(n-1)}(\alpha)x + \cdots + n k(\alpha)x^{n-1} + k(\alpha)x^n\right)e^{\alpha x} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} e^{\alpha x} \qquad (11)$$

Dengan melakukan pemisalan

$$\vec{a}^t = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \end{bmatrix}, \quad \vec{x}^t = \begin{bmatrix} 1 & x & \cdots & x^n \end{bmatrix}, \quad \vec{a}^t = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

dan

$$P = \begin{bmatrix} k(\alpha) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ k'(\alpha) & k(\alpha) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ k''(\alpha) & 2k'(\alpha) & k(\alpha) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k^{(n)}(\alpha) & nk^{(n-1)}(\alpha) & (kb)k^{(n-2)}(\alpha) & \cdots & nk'(\alpha) & k(\alpha) \end{bmatrix}, \tag{12}$$

(kb *adalah koefisien yang sesuai dengan koefisien binomial pangkat* n)

maka (11) menjadi

$$\left(\vec{a}^t P \vec{x}\right) e^{\alpha x} = \vec{a}^t \vec{x} e^{\alpha x}. \tag{13}$$

Kemudian dengan melakukan pembatalan kanan, diperoleh

$$\vec{a}^t P = \vec{a}^t \tag{14}$$

Pandang matriks P pada (12). Maka

- P matriks non singular (P^{-1} *terdefinisi*), jika $k(\alpha) \neq 0$ dan
- P matriks singular (P^{-1} *tak terdefinisi*), jika $k(\alpha) = 0$.

4.1.1. P MATRIKS NON SINGULAR

P matriks non singular, (15) dapat ditulis sebagai

$$\vec{a}^t = \vec{a}^t P^{-1}. \tag{15}$$

Jadi, **solusi partikulir** PD (4) adalah:

$$y_p = \left(\vec{a}^t P^{-1} \vec{x}\right) e^{\alpha x}, \quad k(\alpha) \neq 0 \tag{16}$$

dengan $k(\alpha) = \alpha^2 + p\alpha + q$, dan $\vec{a}^t = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$; $a_0, a_1, \cdots, a_n$ koefisien $P_n(x)$, $\vec{x}^t = \begin{bmatrix} 1 & x & \cdots & x^n \end{bmatrix}$ dan

$$P = \begin{bmatrix} k(\alpha) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ k'(\alpha) & k(\alpha) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ k''(\alpha) & 2k'(\alpha) & k(\alpha) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k^{(n)}(\alpha) & nk^{(n-1)}(\alpha) & (kb)k^{(n-2)}(\alpha) & \cdots & nk'(\alpha) & k(\alpha) \end{bmatrix}.$$

4.1.2. P MATRIKS SINGULAR

$k(\alpha)=0$, berarti P^{-1} tak terdefinisi (P *matriks singular*). Untuk kasus ini, dilakukan sedikit manupulasi, yakni dengan menurunkan (*mendiferensialkan*) kedua ruas (*kanan dan kiri*) terhadap α pada persamaan (11), yaitu

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k(\alpha)e^{\alpha x} \\ \left(k'(\alpha)+k(\alpha)x\right)e^{\alpha x} \\ \vdots \\ \left(k^{(n)}(\alpha)+nk^{(n-1)}(\alpha)x+\cdots+nk(\alpha)x^{n-1}+k(\alpha)x^{n}\right)e^{\alpha x} \end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{d}{d\alpha}\left(\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}e^{\alpha x}\right)$$

atau

$$\begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{d}{d\alpha}k(\alpha)e^{\alpha x} \\ \frac{d}{d\alpha}\left(k'(\alpha)+k(\alpha)x\right)e^{\alpha x} \\ \vdots \\ \frac{d}{d\alpha}\left(k^{(n)}(\alpha)+nk^{(n-1)}(\alpha)x+\cdots+nk(\alpha)x^{n-1}+k(\alpha)x^{n}\right)e^{\alpha x} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}x\,e^{\alpha x}.$$

Substitusi $p(\alpha)=0$, diperoleh

$$\begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k'(\alpha)e^{\alpha x} \\ \left(k''(\alpha)+2k'(\alpha)x\right)e^{\alpha x} \\ \vdots \\ \left(k^{(n+1)}(\alpha)+(n+1)k^{(n)}(\alpha)x+\cdots+(n+1)k'(\alpha)x^{n}\right)e^{\alpha x} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}x\,e^{\alpha x} \qquad (17)$$

atau

$$\begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k'(\alpha) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ k''(\alpha) & 2k'(\alpha) & 0 & \cdots & 0 \\ k'''(\alpha) & 3k''(\alpha) & 3k'(\alpha) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k^{(n+1)}(\alpha) & (n+1)k^{(n)}(\alpha) & & \cdots & (n+1)k'(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} e^{\alpha x}$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} x e^{\alpha x} . \qquad (18)$$

Dengan pemisalan

$$\vec{a}^t = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \end{bmatrix},\ \vec{x}^t = \begin{bmatrix} 1 & x & \cdots & x^n \end{bmatrix},\ \vec{a}^t = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

dan

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} k'(\alpha) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ k''(\alpha) & 2k'(\alpha) & 0 & \cdots & 0 \\ k'''(\alpha) & 3k''(\alpha) & 3k'(\alpha) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k^{(n+1)}(\alpha) & (n+1)k^{(n)}(\alpha) & & \cdots & (n+1)k'(\alpha) \end{bmatrix},$$

maka (18) menjadi

$$\left(\vec{a}^t \mathrm{P} \vec{x}\right) e^{\alpha x} = \vec{a}^t \vec{x}\, x e^{\alpha x} .$$

Kemudian dengan melakukan pencoretan, diperoleh

$$\vec{a}^t \mathrm{P} = \vec{a}^t x . \qquad (19)$$

Pandang matriks P pada (19). Maka

- P matriks non singular (P^{-1} *terdefinisi*), jika $k'(\alpha) \neq 0$ dan
- P matriks singular (P^{-1} *tak terdefinisi*), jika $k'(\alpha) = 0$.

4.1.2.1. P MATRIKS NON SINGULAR

Apabila P matriks non singular, maka terdapat matriks invers P^{-1}, sehingga diperoleh:

$$\vec{a}^t = \vec{a}^t x \mathrm{P}^{-1} . \qquad (20)$$

Jadi dari (20), **solusi partikulir** PD (4) adalah:

$$y_p = \left(\vec{a}^t \mathrm{P}^{-1} \vec{x}\right) x e^{\alpha x}, \quad k(\alpha) = 0 \text{ dan } k'(\alpha) \neq 0 \qquad (21)$$

dengan $k(\alpha) = \alpha^2 + p\alpha + q$, $\vec{a}^t = [a_0 \;\; a_1 \;\; \cdots \;\; a_n]$; $(a_0, a_1, \cdots, a_n$ koef. $P_n(x))$, $\vec{x}^t = \left[1 \;\; x \;\; \cdots \;\; x^n\right]$ dan

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} k'(\alpha) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ k''(\alpha) & 2k'(\alpha) & 0 & \cdots & 0 \\ k'''(\alpha) & 3k''(\alpha) & 3k'(\alpha) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k^{(n+1)}(\alpha) & (n+1)k^{(n)}(\alpha) & & \cdots & (n+1)k'(\alpha) \end{bmatrix}$$

4.2.2.2. P MATRIKS SINGULAR

Apabila P matriks non singular, maka terdapat matriks invers P^{-1}. Ini berarti $k'(\alpha) = 0$. Untuk kasus ini, dilakukan sedikit manipulasi lagi, yakni dengan menurunkan (*mendiferensialkan*) kedua ruas (*kanan dan kiri*) terhadap α pada persamaan (17), sehingga diperoleh

solusi partikulir PD (4) adalah:

$$y_p = \left(\vec{a}^t Q^{-1} \vec{x}\right) x e^{\alpha x}, \quad k(\alpha) = 0 \text{ dan } k'(\alpha) = 0 \qquad (22)$$

dengan $k(\alpha) = \alpha^2 + p\alpha + q$, $\vec{a}^t = [a_0 \;\; a_1 \;\; \cdots \;\; a_n]$; $(a_0, a_1, \cdots, a_n$ koef. $P_n(x))$, $\vec{x}^t = \left[1 \;\; x \;\; \cdots \;\; x^n\right]$ dan

$$Q = \begin{bmatrix} k''(\alpha) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ k'''(\alpha) & 3k''(\alpha) & 0 & \cdots & 0 \\ k^{iv}(\alpha) & 4k'''(\alpha) & 4k''(\alpha) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k^{(n+2)}(\alpha) & (n+2)k^{(n+1)}(\alpha) & & \cdots & (n+2)k''(\alpha) \end{bmatrix}$$

Aplikasi untuk rumus (16), (21) atau (22), digunakan contoh 1 dan 2.

Contoh 7.

Pandang PD pada contoh 1: $y'' - y = 4xe^{3x}$, maka disini polinom pada $r(x)$ adalah polinom berderajat 1, sehingga $\vec{a}^t = [a_0 \quad a_1] = [0 \quad 4]$ atau $a_0 = 0$ dan $a_1 = 4$. Selanjutnya,

$$k(\alpha) = \alpha^2 - 1 \text{ dan } k'(\alpha) = 2\alpha .$$

Kemudian, untuk $\alpha = 3$, maka $k(3) = 8 \neq 0$ dan $k'(3) = 6$

Jadi dengan menggunakan rumus (16) diperoleh solusi Partikulir PD sebagai berikut:

$$y_p = [a_0 \quad a_1]\begin{bmatrix} k(3) & 0 \\ k'(3) & k(3) \end{bmatrix} = [0 \quad 4]\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} e^{3x} = \left\{ \frac{0}{8} - \frac{(4)(6)}{(8)^2} + \frac{4}{8}x \right\} e^{3x}$$

$$= \left(-\tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{2}x\right)e^{3x} .$$

■

Contoh 8

Perhatikan PD pada contoh 2, yakni: $y'' - y = 4x^2e^{-x}$, maka di sini $\alpha = -1$, dan $k(\alpha) = \alpha^2 - 1$ dan $k(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$. Gunakan rumus (21), yakni

$$y_p = [a_0 \quad a_1 \quad a_2]\begin{bmatrix} k'(-1) & 0 & 0 \\ k''(-1) & 2k'(-1) & 0 \\ k'''(-1) & 3k''(-1) & 3k'(-1) \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} e^{-x} .$$

Selanjutnya, dari PD diperoleh $a = [a_0 \quad a_1 \quad a_2] = [0 \quad 0 \quad 4]$ atau $a_0 = 0$, $a_1 = 0$ dan $a_2 = 4$. $k(\alpha) = \alpha^2 - 1$, maka $k'(\alpha) = 2\alpha \rightarrow k'(-1) = -2$, $k''(\alpha) = 2 \rightarrow k''(-1) = 2$ dan $k'''(\alpha) = 0 \rightarrow k'''(-1) = 0$.

Maka, solusi partikulir PD adalah

$$y_p = [0 \quad 0 \quad 4]\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} e^{-x} .$$

Dengan menggunakan perangkat lunak MATHEMATICA untuk operasi perkalian, diperoleh (*langkah-langkah operasi lihat APENDIKS*)

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 2 & -4 & 0\\ 0 & 6 & -6\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}-1 & -1 & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}.$$

Jadi, diperoleh solusi partikulir untuk masalah ini adalah:

$$y_p = \begin{bmatrix}-1 & -1 & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ x^2\\ x^3\end{bmatrix}e^{-x} = \left(-x - x^2 - \tfrac{2}{3}x^3\right)e^{-x}.$$

■

4.2. Bentuk $r(x) = P_n(x)$

Pilih $\alpha = 0$, maka $r(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ menjadi $r(x) = P_n(x)$. Jadi **solusi Partikulir** PD (4) dengan $r(x) = P_n(x)$ dapat diperoleh dari rumus atau formula (16), (21) atau (22) untuk $\alpha = 0$.

Aplikasi untuk formula (16), (21) atau (22) dengan bentuk $r(x) = P_n(x)$, digunakan contoh 3 dan 4.

Contoh 9

Pandang PD: $y'' - y = 4x^3$, $k(\alpha) = \alpha^2 - 1$ dan $k(0) = 0^2 - 1 = -1 \neq 0$

Digunakan rumus (16) untuk mencari solusi khusus PD: $y'' - y = 4x^3$.

Disini $\vec{a}^t = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$, $k(\alpha) = \alpha^2 - 1 \to k(0) = -1$,

$k'(\alpha) = 2\alpha \to k'(0) = 0$, $k''(\alpha) = 2 \to k''(0) = 2$, dan $k'''(\alpha) = 0$

$\to k'''(0) = 0$. Sehingga

$$P = \begin{bmatrix}k(\alpha) & 0 & 0 & 0\\ k'(\alpha) & k(\alpha) & 0 & 0\\ k''(\alpha) & 2k'(\alpha) & k(\alpha) & 0\\ k'''(\alpha) & 3k''(\alpha) & 3k'(\alpha) & k(\alpha)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 6 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

Maka solusi Partikulir PD adalah

$$y_p = \vec{a}^t P^{-1}\vec{x} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 6 & 0 & -1\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1\\ x\\ x^2\\ x^3\end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan perangkat lunak Mathematica diperoleh:

$$[0 \quad 0 \quad 0 \quad 4]\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = [0 \quad -8 \quad 0 \quad -4].$$

Jadi, solusi partikulir PD adalah:

$$y_p = \vec{a}^t P^{-1}\vec{x} = [0 \quad -24 \quad 0 \quad -4]\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = -24x - 4x^3.$$

■

Contoh 10.

Pandang PD: $y'' - y' = 4x^3$. $k(\alpha) = \alpha^2 - \alpha$ dan $k(0) = 0^2 - 0 = 0$.

Digunakan rumus (21) untuk mencari solusi khusus PD: $y'' - y' = 4x^3$.

Disini $\vec{a}^t = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 4]$, $k(\alpha) = \alpha^2 - \alpha \to k(0) = 0$, $k'(\alpha) = 2\alpha - 1 \to$ $k'(0) = -1$, $k''(\alpha) = 2 \to k''(0) = 2$, $k'''(\alpha) = 0 \to k'''(0) = 0$ dan $k^{(4)}(\alpha) = 0 \to k^{(4)}(0) = 0$.

Sehingga

$$P = \begin{bmatrix} k'(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ k''(\alpha) & 2k'(\alpha) & 0 & 0 \\ k'''(\alpha) & 3k''(\alpha) & 3k'(\alpha) & 0 \\ k^{(4)}(\alpha) & 4k'''(\alpha) & 6k''(\alpha) & 4k'(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -4 \end{bmatrix}.$$

Maka solusi Partikulir PD adalah

$$y_p = \left(\vec{a}^t P^{-1}\vec{x}\right)x = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 4]\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}x.$$

$$= [-24 \quad -12 \quad -4 \quad -1]\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}x = -24x - 12x^2 - 4x^3 - x^4.$$

■

4.3. Bentuk $r(x) = P_n(x)e^{bx}\cos\omega x$ atau $r(x) = P_n(x)e^{bx}\sin\omega x$.

Bentuk $r(x) = P_n(x)e^{bx}\cos\omega x$ atau $r(x) = P_n(x)e^{bx}\sin\omega x$. Bentuk $r(x)$ dapat dibuat lebih umum dalam bentuk fungsi Kompleks dengan menggunakan Identitas Euler, yaitu

$$G(x) = P_n(x)e^{bx}.e^{i\omega x} = P_n(x)e^{(b+i\omega)x}. \qquad (23)$$

Gunakan hubungan (3), diperoleh

$$P_n(x)e^{bx}\cos\omega x = \text{Re}[G(x)] \text{ dan } P_n(x)e^{bx}\sin\omega x = \text{Im}[G(x)]. \qquad (24)$$

Jadi, formula (17), (22) dan (23) dapat digunakan untuk menentukan solusi partikulir PD untuk $r(x) = P_n(x)e^{bx}\cos\omega x$ atau $r(x) = P_n(x)e^{bx}\sin\omega x$ dengan mengambil $\alpha = b + i\omega$ dan menggunakan hubungan (24), yaitu

$$y_p = \text{Re}\left[\left(\vec{a}^t P^{-1}\vec{x}\right)e^{\alpha x}\right], \; k(\alpha) \neq 0 \text{ dan } r(x) = P_n(x)e^{bx}\cos\omega x; \qquad (25a)$$

atau

$$y_p = \text{Im}\left[\left(\vec{a}^t P^{-1}\vec{x}\right)e^{\alpha x}\right], \; k(\alpha) \neq 0 \text{ dan } r(x) = P_n(x)e^{bx}\sin\omega x. \qquad (25b)$$

$$y_p = \text{Re}\left[\left(\vec{a}^t \text{P}^{-1}\vec{x}\right)xe^{\alpha x}\right], \; k(\alpha) = 0, \; k'(\alpha) \neq 0, \text{ dan}$$

$$r(x) = P_n(x)e^{bx}\cos\omega x; \qquad (26a)$$

atau

$$y_p = \text{Im}\left[\left(\vec{a}^t \text{P}^{-1}\vec{x}\right)xe^{\alpha x}\right], \; k(\alpha) = 0, \; k'(\alpha) \neq 0 \text{ dan}$$

$$r(x) = P_n(x)e^{bx}\sin\omega x. \qquad (26b)$$

$$y_p = \text{Re}\left[\left(\vec{a}^t Q^{-1}\vec{x}\right)xe^{\alpha x}\right], \; k(\alpha) = 0, \; k'(\alpha) = 0 \text{ dan}$$

$$r(x) = P_n(x)e^{bx}\cos\omega x; \qquad (27a)$$

atau

$$y_p = \text{Im}\left[\left(\vec{a}^t Q^{-1}\vec{x}\right)xe^{\alpha x}\right], \; k(\alpha) = 0, \; k'(\alpha) = 0 \text{ dan}$$

$$r(x) = P_n(x)e^{bx}\sin\omega x. \qquad (27b)$$

Aplikasi untuk formula (25), (26) atau (27), digunakan contoh 5 dan 6.

Contoh 11.

Pandang PD pada contoh 5.: $y'' - y = 4x\cos\omega x$. Untuk masalah ini $\alpha = i\omega$, maka $k(\alpha) = \alpha^2 - 1 = (i\omega)^2 - 1 = -\omega^2 - 1$ dan $k'(\alpha) = 2\alpha = 2i\omega$. Kemudian, karena $k(\alpha) \neq 0$ dan $r(x) = 4x\cos\omega x$, maka dari (25a) diperoleh $y_p = \mathrm{Re}\left[\left(\vec{a}^t P^{-1}\vec{x}\right)e^{\alpha x}\right]$, dengan $\alpha = i\omega$, $\vec{a}^t = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix}$, $x^t = \begin{pmatrix} 1 & x \end{pmatrix}$ dan $P = \begin{bmatrix} k(\alpha) & 0 \\ k'(\alpha) & k(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega^2 - 1 & 0 \\ 2i\omega & -\omega^2 - 1 \end{bmatrix}$. Jadi,

$$y_p = \mathrm{Re}\left[\left(\begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} -\omega^2 - 1 & 0 \\ 2i\omega & -\omega^2 - 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}\right)e^{i\omega x}\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\left(\begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{-\omega^2 - 1} & 0 \\ \dfrac{2i\omega}{\left(-\omega^2 - 1\right)^2} & \dfrac{1}{-\omega^2 - 1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}\right)e^{i\omega x}\right].$$

Sehingga diperoleh

$$y_p = \mathrm{Re}\left[\left\{-\frac{(4)(2i\omega)}{(-\omega^2 - 1)^2} + \frac{4}{(-\omega^2 - 1)}x\right\}e^{i\omega x}\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\left\{-\frac{8i\omega}{(\omega^2 + 1)^2} - \frac{4}{(\omega^2 + 1)}x\right\}\left\{\cos\omega x + i\sin\omega x\right\}\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[-\frac{8i\omega}{(\omega^2 + 1)^2}\cos\omega x - \frac{4x}{(\omega^2 + 1)}\cos\omega x + \frac{8\omega}{(\omega^2 + 1)^2}\sin\omega x - \frac{4ix}{(\omega^2 + 1)}\sin\omega x\right]$$

$$= -\frac{4x}{(\omega^2 + 1)}\cos\omega x + \frac{8\omega}{(\omega^2 + 1)^2}\sin\omega x$$

$$= \frac{4}{(\omega^2 + 1)}\left[2\omega\sin\omega x - (\omega^2 + 1)\cos\omega x\right].$$

Contoh 12.

Pandang PD pada contoh 6.: $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$. Untuk masalah ini $\alpha = 1 + i$, maka $k(\alpha) = \alpha^2 - 2\alpha + 2 = (1+i)^2 - 2(1+i) + 2 = 0$ dan $k'(\alpha) = 2\alpha - 2 = 2(1+i) - 2 = 2i$. Kemudian, karena $k(\alpha) = 0$ dan $r(x) = e^x \sin x$, maka digunakan formula (26b) diperoleh

$y_p = \text{Im}\left[\left(\vec{a}^t \text{P}^{-1} \vec{x}\right) x e^{\alpha x}\right]$, dangan $\alpha = 1 + i$, $\vec{a}^t = (a_0) = (1) = 1$, $\vec{x}^t = (1) = 1$

dan $\text{P} = [k'(\alpha)] = [2i] = 2i \Rightarrow \text{P}^{-1} = \dfrac{1}{2i} \Rightarrow -\dfrac{1}{2} i$ (*karena polinom berderajat nol* [$P_0(x)$]). Jadi,

$$y_p = \text{Im}\left[\left((1)\left(\tfrac{1}{2} i\right)(1)\right) x\, e^{(1+i)x}\right] = \text{Im}\left[\left(\tfrac{1}{2} i\right) x\, e^x e^{ix}\right].$$

Gunakan hubungan (2), didapat

$$y_p = \text{Im}\left[\left(\tfrac{1}{2} i\right) x e^x (\cos x + i \sin x)\right] = \text{Im}\left[\underbrace{i\tfrac{1}{2} x e^x \cos x}_{\text{bag. Imajiner}} - \underbrace{\tfrac{1}{2} x e^x \sin x}_{\text{bag. Real}}\right]$$

$$= -\tfrac{1}{2} x e^x \cos x.$$

V. KESIMPULAN.

Sebagaimana diketahui suatu metode yang ditemukan tidak luput dari kelebihan den kelemahan dalam penggunaannya dan tidak terkecuali metode Matriks dalam menentukan solusi partikulir PD Linear Orde Dua Tak Homogen dengan Koefisien Konstanta.

Kelebihan dari metode Matriks untuk menentukan solusi partikulir PD Linear Orde Dua Tak Homogen dengan Koefisien Konstanta adalah sebagai berikut:

1- Solusi PD homogen tidak diperlukan, dan Akar-akar karakteristik PD homogen tidak dibutuhkan secara lengkap, tetapi hanya menurunkan/mendiferensialkan bentuk (10) secara sederhana sebanyak $k+1$ kali terhadap parameter α, dimana k merupakan kelipatan dari α sebagai akar karakteristik polinomial $p(\alpha)$ [1].

2- Sistematika pengerjaan mencari solusi lebih sederhana, karena dalam pengerjaan tinggal mensubstitusi parameter-parameter yang diketahui kedalam bentuk rumus umum dan juga tidak berhubungan dengan konstanta tak diketahui seperti pada metode Koefisien Tak Tentu dan Variasi Parameter. Ini mengakibatkan kesalahan dalam pengerjaan akan sangat menjadi kecil.

3- Dengan perkembangan perangkat lunak dibidang Matematika seperti, perangkat lunak Mathematica dan Maple, akan sangat memudahkan pengerjaan dengan metode Matriks ini. Hal ini akan menstimulir, khususnya mahasiswa Matematika untuk menggunakan perangkat lunak dibidang Matematika.

4- Dalam penurunan metode Matriks ini, khususnya mahasiswa Matematika, menambah wawasan tentang aplikasi dari konsep-konsep dasar Matematika, khususnya konsep Matriks, Linearitas dan Identitas Euler, pada masalah PD Linear Orde Dua tak Homugen untuk mencari solusi partikulir.

Kelemahan dari metode Matriks ini adalah sebagai berikut:

1- Untuk dapat memahami penurunan konsep metode Matriks diperlukan pengetahuan tentang metode Koefisien tak Tentu terlebih dahulu.

2- Apabila pengetahuan mengenai perangkat lunak Mathematica dan se-jenisnya tidak dimiliki, penyelesaian solusi Partikulir untuk PD yang mempunyai bentuk $r(x)$ hasil perkalian fungsi eksponensial dengan polinomial berderajat tinggi $n > 2$ akan menjadi sedikit rumit, karena dalam proses penyelesaian akan menemukan matriks berukuran besar dalam penentuan invers matriks.

3- Bentuk fungsi $r(x)$ yang dapat diselesaikan dengan metode Matriks ini hanya terbatas dalam bentuk-bentuk perkalian antara fungsi eksponen-sial dan polinomial, karena metode ini diturunkan dari metode Koefisien tak Tentu.

VI. DAFTAR PUSTAKA.

Ada satu journal dan beberapa buku text yang harus dibaca untuk menunjang penelitian ini. Buku text diperlukan untuk penurunan dan perumusan metode Matriks yang akan dianalisis.

[1]. Gollwitzer, H. Matrix patern and undetermined coefficients. _The College Mathematics Journal_ **25** no. **5** (1994); 444 - 448.

[2]. Nababan, S.M. (1984). _Pendahuluan Persamaan Diferensial Biasa_. Karunika Universitas Terbuka, Jakarta.

[3]. Boyce, W. E. & DiPrima, R. C (1992). _Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems_: John Wiley & Sons, Inc. New York.

[4]. Simmons, George F (1991). _Differential Equations with Applications and Historical Notes_: McGraw-Hill, Inc. New York.

[5]. Agarwal, Ravi P. & Gupta, Ramesh C (1993). _Essentials of Ordinary Differential Equations_: McGraw-Hill Book Company Singapore.

[6]. Kreyszig, Erwin (1993). _Advanced Engineering Mathematics_: John Wiley & Sons, Inc. New York.

[7]. Braun, Martin (1993). _Differential Equations with Applications and Historical Notes_. Springer-Verlag. New York.

[8]. Giordano, Frank R & Weir, Maurice D (1991). _Differential Equation (A Modeling Approach_

[9]. Rao, M. Rama Mohana (1981). _Ordinary Differential Equations_: Edward Arnold. London.

VII. APENDIKS.

$$
\begin{aligned}
L(e^{\alpha x}) &= (D^2 + pD + q)e^{\alpha x} = D^2 e^{\alpha x} + pDe^{\alpha x} + qe^{\alpha x} \\
&= \frac{d^2}{dx^2} e^{\alpha x} + p\frac{d}{dx} e^{\alpha x} + qe^{\alpha x} \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} e^{\alpha x}\right) + p\frac{d}{dx} e^{\alpha x} + qe^{\alpha x} \\
&= \alpha \frac{d}{dx} e^{\alpha x} + p\alpha e^{\alpha x} + qe^{\alpha x} \\
&= \alpha^2 e^{\alpha x} + p\alpha e^{\alpha x} + qe^{\alpha x} \\
&= (\alpha^2 + p\alpha + q)e^{\alpha x}
\end{aligned}
$$

$\therefore\ L(e^{\alpha x}) = p(\alpha)\, e^{\alpha x},$ dengan $p(\alpha) = \alpha^2 + p\alpha + q.$

$$
\begin{aligned}
L(x e^{\alpha x}) &= (D^2 + pD + q)\, x e^{\alpha x} = D^2(x e^{\alpha x}) + pD(x e^{\alpha x}) + q\, x e^{\alpha x} \\
&= \frac{d^2}{dx^2}(x e^{\alpha x}) + p\frac{d}{dx}(x e^{\alpha x}) + q\, x e^{\alpha x} \\
&= \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}(x e^{\alpha x})\right] + p\frac{d}{dx}(x e^{\alpha x}) + q\, x e^{\alpha x} \\
&= \frac{d}{dx}\left[e^{\alpha x} + \alpha\, x e^{\alpha x}\right] + p\left[e^{\alpha x} + \alpha\, x e^{\alpha x}\right] + q\, x e^{\alpha x} \\
&= \left[\alpha\, e^{\alpha x} + \alpha e^{\alpha x} + \alpha^2 x e^{\alpha x}\right] + p\left[e^{\alpha x} + \alpha\, x e^{\alpha x}\right] + q\, x e^{\alpha x} \\
&= \underbrace{(\alpha^2 + p\,\alpha + q)}_{p(\alpha)}\, x e^{\alpha x} + \underbrace{(2\alpha + p)}_{p'(\alpha)}\, e^{\alpha x}
\end{aligned}
$$

$\therefore\ L(x e^{\alpha x}) = \{p(\alpha)\, x + p'(\alpha)\} e^{\alpha x}.$

RIWAYAT HIDUP PENELITI

N a m a	:	Drs. Zulmahdi Dailami
N I P	:	131643904
U n i t	:	Jurusan Matematika FMIPA - UT
Tempat / Tgl. Lahir	:	Tanjung Alam / 6 April 1957
Pendidikan	:	S1, Matematika, ITB, 1985
Pengalaman Penelitian	:	-

UCAPAN TERIMA KASIH

Sehubungan dengan selesainya penulisan laporan ini , penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada pihak-pihak yang sudah membantu kelancaran penyelesaian penelitian ini.

Pertama-tama penulis mengucapkan terima kasih kepada Dekan FMIPA Universitas Terbuka, Dr. Djati Kerami yang sudah meluangkan waktunya dalam memberikan kritik dan saran untuk penelitian ini.

Selain itu juga penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada Kepala Lembaga Penelitian, Dr. WBP Simanjuntak dan Kepala Pusat Studi Indonesia, Dr. Tian Belawati yang telah memberi kesempatan kepada penulis untuk mengikuti seleksi pembiayaan penelitian bidang ilmu di Universitas Terbuka ini.

Tidak lupa juga penulis mengucapkan terima kasih kepada rekan-rekan di Jurusan Matematika FMIPA UT yang sudah membantu penelitian ini berupa berupa kritik dan saran sehingga penelitian dan laporannya dapat diselesaikan.