

Buku Ajar Geometri Transformasi Model *Guided Note Taking* (GNT)

Oleh:

Dr. Lusi Rachmiazasi Masduki, M.Pd.

Pukky Tetralian Bantining Ngastiti, S.Pd.,M.Mat.



Buku Ajar Geometri Transformasi

Model *Guided Note Taking*(GNT)

2021 | 00273

Penulis

Dr. Lusi Rachmiazasi Masduki, M.Pd.

Pukky Tetralian Bantining Ngastiti, S.Pd.,M.Mat.

ISBN : 978-623-6356-32-6

Editor

Dr.Abdul Rahman H.,M.T.,CT.,CHCP.

Desain Sampul

Lukas Liani, S.Psi

Layout

Asep Nugraha, S.Hum

Cetakan Pertama, Agustus 2021

v+ 177 hlm ; 14.8 x 21 cm

Penerbit

Yayasan Pendidikan dan Sosial

Indonesia Maju (YPSIM) Banten

Kavling Muntil Blok A. 12, Ciracas

Kota Serang Provinsi Banten

E-mail: Ypsimbanten@gmail.com

Website : www.ypsimbanten.com

WhatsApp: 0815 9516 818

ANGGOTA IKAPI No. 039/BANTEN/2020

(IKATAN PENERBIT INDONESIA)

Hak Cipta Dilindungi oleh Undang-undang Dilarang mengutip atau memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini dalam bentuk apapun juga tanpa izin tertulis dari Penerbit

KATA PENGANTAR

Puji syukur saya panjatkan kehadirat Allah SWT atas rahmat dan hidayah -Nya atas terselesaikannya buku ajar Geometri Transformasi dengan model *guided note taking*. Tim peneliti memberikan masukan atas permasalahan yang terjadi di dunia pendidikan dalam bentuk pelaksanaan penelitian dan menghasilkan sebuah buku ajar , Selanjutnya Tim peneliti telah merumuskan masalah dan ternyata masih banyak mahasiswa mengalami kesulitan terhadap mata kuliah yang berkaitan Geometri salah satunya adalah mata kuliah Geometri Transformasi.

Kemudian dari hasil penelitian kami menunjukkan bahwa rata-rata mahasiswa mengalami kesulitan dalam pembuatan grafik dan kesulitan dalam mengerjakan soal abstraksi berkaitan dengan geometri . Oleh karena itu Tim peneliti membuat buku ajar Geometri Transformasi dengan model *guided note taking* (GNT), sehingga mahasiswa bisa lebih aktif dalam proses pembelajaran.

Demikianlah pengantar dari saya semoga bermanfaat bagi kita semua, dan atas kritik dan sarannya kami ucapkan banyak terima kasih. Aamiin

Semarang, 19 Juni 2021
Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	iv
DAFTAR ISI	v
Modul 1: Relasi, Fungsi, dan Transformasi.....	1
Kegiatan Belajar 1: Relasi dan Fungsi.....	1
Rangkuman Relasi dan Fungsi.....	5
Kegiatan Belajar 2: Transformasi.....	6
Rangkuman Transformasi.....	12
Tes Formatif Modul 1.....	13
Modul 2: Isometri dan Pencerminan.....	16
Kegiatan Belajar 1: Isometri.....	16
Rangkuman Isometri.....	21
Kegiatan Belajar 2: Pencerminan.....	22
Rangkuman Pencerminan.....	27
Tes Formatif Modul 2.....	28
Modul 3: Setengah Putaran dan Ruas Garis Berarah.	31
Kegiatan Belajar 1: Setengah Putaran.....	31
Rangkuman Setengah Putaran.....	36
Kegiatan Belajar 2: Ruas Garis Berarah.....	37
Rangkuman Ruas Garis Berarah.....	41
Tes Formatif Modul 3.....	42
Modul 4: Translasi.....	46
Kegiatan Belajar 1: Translasi.....	46
Rangkuman Translasi.....	51

Kegiatan Belajar 2: Ketertutupan Translasi.....	52
Rangkuman Ketertutupan Translasi.....	54
Tes Formatif Modul 4.....	55
Modul 5: Rotasi.....	58
Kegiatan Belajar 1: Rotasi.....	58
Rangkuman Rotasi.....	87
Kegiatan Belajar 2: Komposisi Rotasi.....	88
Rangkuman Komposisi Rotasi.....	103
Tes Formatif Modul 5.....	104
Modul 6: Refleksi Geser dan Grup Isometri.....	108
Kegiatan Belajar 1: Refleksi Geser.....	108
Rangkuman Refleksi Geser.....	112
Kegiatan Belajar 2: Grup Isometri.....	113
Rangkuman Grup Isometri.....	117
Tes Formatif Modul 6.....	118
Modul 7: Teorema Dasar Isometri.....	121
Kegiatan Belajar 1: Teorema Keunggulan dan Teorema Dasar Isometri.....	121
Rangkuman Teorema Keunggulan dan Teorema Dasar Isometri.....	129
Kegiatan Belajar 2: Kesamaan (Parity) dan Persamaan Isometri.....	130
Rangkuman Kesamaan (Parity) dan Persamaan Isometri.....	142
Tes Formatif Modul 7.....	144

Modul 8: Similaritas.....	147
Kegiatan Belajar 1: Similaritas dan Dilatasi.....	147
Rangkuman Similaritas dan Dilatasi.....	156
Kegiatan Belajar 2: Teorema Similaritas dan Persamaan Similaritas.....	157
Rangkuman Teorema Similaritas dan Persamaan Similaritas.....	162
Tes Formatif Modul 8.....	163
Modul 9: Grup Simetri dan Grup Dihedral.....	166
Kegiatan Belajar 1: Simetri dan Grup Simetri.....	166
Rangkuman Simetri dan Grup Simetri.....	169
Kegiatan Belajar 2: Grup Dihedral dan Teorema Leonardo.....	170
Rangkuman Grup Dihedral dan Teorema Leonardo.....	173
Tes Formatif Modul 9.....	174
Daftar Pustaka.....	175
Tentang Penulis.....	177

Modul 1

Relasi, Fungsi, dan Transformasi

Kegiatan belajar 1 : Relasi dan Fungsi

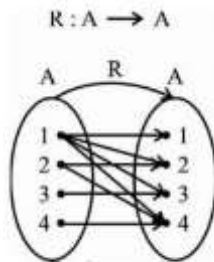
A. Pengertian Relasi

Definisi 1.1:

Misalkan A dan B (.....) tak kosong dan $P(x,y)$ kalimat matematika terbuka $x \in A$ ke $y \in A$. Relasi R dari himpunan A ke B merupakan suatu himpunan yang (.....) pasangan terurut (a,b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$ serta $P(a,b)$ bernilai benar.

Contoh 1.1

$A = \{z \mid z < 5, z \text{ suatu bilangan asli}\}$, $P(x,y) = x$ habis membagi y . Relasi R dari himpunan A ke A yang ditunjukkan oleh $P(x,y)$ adalah $\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\}$, seperti gambar 1.1 berikut.



Gambar 1.1

Beberapa istilah yang perlu diingat dalam relasi dua fungsi yaitu peta, prapeta, domain, dan range.

B. Macam-Macam Relasi

Definisi 1.2:

Misalkan A suatu (.....), R suatu relasi dari A ke A . R disebut relasi refleksi jika dan hanya jika untuk setiap $x \in A$ berlaku $(x, x) \in R$.

Contoh 1.2

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dengan

$R_1 = \{(1, 1), (2, 4), (4, 1), (4, 4)\}$ dan

$R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$. R_1 bukan relasi

refleksi, sebab $2, 3 \in A$, sedangkan $(2, 2), (3, 3) \notin R_1$.

Akan tetapi, R_2 adalah relasi refleksi sebab untuk setiap $x \in A$ maka $(x, x) \in R_2$ yaitu

$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \in R_2$.

Definisi 1.3:

Misalkan A suatu himpunan tak kosong, R suatu relasi dari A ke A . Relasi R disebut (.....) jika dan hanya jika untuk setiap $(x, y) \in R$ berlaku $(y, x) \in R$.

Contoh 1.3

R_1 dan R_2 pada contoh 1.2, masing-masing bukan merupakan relasi simetri, sebab $(2, 4) \in R_1$. Akan tetapi $(4, 2) \notin R_1$ dan $(4, 1) \in R_2$, tetapi $(1, 4) \notin R_2$.

Definisi 1.4:

Misalkan A suatu himpunan tak kosong, R suatu relasi pada A . Relasi R disebut (.....) jika dan hanya jika untuk setiap $(x, y), (y, z) \in R$ berlaku $(x, z) \in R$.

Definisi 1.5:

Misalkan A suatu himpunan, R suatu relasi pada A . Relasi R disebut (.....) jika dan hanya jika R adalah relasi refleksi, simetri, dan transitif.

Definisi 1.6:

Misalkan A, B dua himpunan dan R relasi dari A ke B . Relasi balikan (invers) dari R yang ditulis R^{-1} $\{(x, y) | (y, x) \in R\}$.

Contoh 1.4

R_1 dan R_2 pada contoh 1.2, dapat ditentukan bahwa

$$R_1^{-1} = \{(1,1), (4,2), (1,4), (4,4)\} \text{ dan}$$

$$R_2^{-1} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,4), (4,4)\}$$

C. Pengertian Fungsi

Definisi 1.7

Suatu relasi f dari himpunan A ke himpunan B disebut (.....) jika dan hanya jika setiap $x \in A$ ada dengan tunggal $y \in B$ sehingga $(x, y) \in f$.

Contoh 1.5

Misalkan R himpunan semua bilangan real. Ditetapkan relasi f dari R ke R sebagai berikut.

1. $f(x) = x^2, x \in R$

2. $f(x) = x^3, x \in R$

Manakah diantara relasi diatas yang merupakan fungsi?

Penyelesaian:

1. Karena $\forall x \in R, x^2 = x \cdot x$, maka $x \cdot x$ adalah anggota R dan juga merupakan hasil yang tunggal

maka setiap $x \in R$ mempunyai peta, yaitu x^2 , jadi f merupakan fungsi dari R ke R .

2. Karena $\forall x \in R, x^3 = x \cdot x \cdot x \in R$, maka $x \cdot x \cdot x$ adalah anggota R dan juga merupakan hasil yang tunggal maka setiap $x \in R$ mempunyai peta, yaitu x^3 , jadi f merupakan fungsi dari R ke R .

D. Macam-Macam Fungsi

Definisi 1.8

Misalkan f (.....) dari himpunan A ke himpunan B . Fungsi ini disebut fungsi A ke B jika dan hanya jika $y \in B$ ada $x \in A$ sehingga $y = f(x)$.

Definisi 1.9

Misalkan f fungsi dari himpunan A ke himpunan B . Fungsi ini disebut (.....) dari A ke B jika dan hanya jika untuk setiap $x, y \in A$, jika $x \neq y$ maka $f(x) \neq f(y)$.

Teorema 1.1

Misalkan f fungsi dari A ke B . Pernyataan $\forall x, y \in A$, jika $x \neq y$ maka $f(x) \neq f(y)$ ekuivalen dengan pernyataan: $\forall x, y \in A$ jika $f(x) = f(y)$ maka $x = y$.

Teorema 1.2

Fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah satu-satu jika dan hanya jika $\forall x, y \in A$ jika $f(x) = f(y)$ maka $x = y$.

Definisi 1.10

Fungsi f dari himpunan A ke himpunan B disebut (.....) jika dan hanya jika f merupakan fungsi kepada dan fungsi satu-satu.

Rangkuman

1. Relasi R dari himpunan A ke B mempunyai suatu himpunan yang anggota-anggotanya adalah pasangan terurut (a,b) dengan $a \in A$ ke $b \in B$ dan $R(a,b)$ berarti benar.
2. Relasi ekuivalen adalah
 - a. Relasi refleksi;
 - b. Relasi simetri;
 - c. Relasi transitif.
3. Setiap relasi R dari himpunan A ke B mempunyai relasi balikan (invers) , yaitu $R^{-1} = \{(a,b)|(b,a) \in R\}$
4. Relasi f dari himpunan A ke himpunan B disebut fungsi jika dan hanya jika setiap $x \in A$ ada tunggal $y \in B$ sehingga $f(x) = y$.
5. Fungsi f dari himpunan A ke himpunan B disebut fungsi satu-satu jika dan hanya jika setiap unsur $y \in B$ ada $x \in A$ sehingga $f(x)=y$.
6. Fungsi f dari himpunan A ke himpunan B disebut fungsi satu-satu jika dan hanya jika setiap $x,y \in A$ dengan $x \neq y$ maka $f(x) \neq f(y)$ atau untuk setiap $x,y \in A$ menjadi $f(x)=f(y)$ maka $x = y$.
7. Fungsi f dari himpunan A ke himpunan B disebut fungsi bijektif jika dan hanya jika f merupakan fungsi kepada dan fungsi satu-satu.

Kegiatan Belajar 2 : Transformasi

A. Pengertian Transformasi

Definsi 1.11

Misalkan V bidang Euclides. Fungsi T dari V ke V disebut suatu (.....) jika dan hanya jika T sebuah fungsi bijektif.

Contoh 1.6

Misalkan V bidang Euclides dan A sebuah titik tertentu pada V . Ditetapkan relasi T sebagai berikut.

i) $T(P) = A$, jika $P = A$

ii) Jika $p \in V$ dan $p \neq A$, $T(P) = Q$ dengan Q merupakan titik tengah ruas garis $\overline{AP}$.

Apakah relasi T merupakan suatu transformasi?

Penyelesaian

Karena yang harus diteliti relasi T sehubungan dengan suatu transformasi, berdasarkan defiinsi 1.11, diperoleh persyaratan suatu transformasi, yaitu:

1. T suatu fungsi dari V ke V
2. T suatu fungsi bijektif.

Dari definisi 1.10, diperoleh persyaratan bahwa suatu fungsi bijektif adalah

1. Fungsi tersebut harus merupakan fungsi kepada
2. Fungsi tersebut harus merupakan fungsi satu-satu.

B. Komposisi Transformasi

Definisi 1.12

Andaikan diberikan dua transformasi T_1 dan T_2 , komposisi dari T_1 dan T_2 yang ditulis dengan notasi $T_1 \circ T_2$ ditetapkan sebagai:

$$T_1 \circ T_2 [P = T_1 T_2 P], \forall P \in V$$

Teorema 1.3

Apabila diberikan dua transformasi T_1 dan T_2 ,
(.....) dari T_1 dan T_2 merupakan suatu transformasi. (Teorema ini disebut pula teorema ketertutupan transformasi).

Contoh 1.7

Ambil transformasi T_1 yang ditetapkan.

i) $T(P) = A$, jika $P = A$

ii) Jika $P \in V$ dan $P \neq A$, $T(P) = Q$ dengan Q merupakan titik tengah ruas garis $\overline{AP}$.

Misalkan V bidang Euclides, sedangkan A suatu titik tertentu. T_1 ditetapkan untuk setiap $P \in V$,

iii) Jika $P=A$, $T_1(P) = A$.

iv) Jika $P \neq A$, $T_1(P)=P'$ dengan P' titik tengah $\overline{AP}$.

Selanjutnya, kita ambil relasi T_2 yang ditetapkan sebagai berikut, misalnya V bidang Euclides dan g suatu garis tertentu. Untuk setiap $P \in V$

v) Jika $P \in g$, $T_2(P) = P$

vi) Jika $P \notin g$, $T_2(P) = P'$ dengan P' titik tengah ruas garis tegak lurus dari P ke g .

Selidiki :

a) Apakah T_2 suatu transformasi ?

b) Apakah $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$?

Penyelesaian:

1. Ditunjukkan bahwa

a. T_2 fungsi dari V ke V

Berdasarkan 2.1, $\forall X \in V$ dan $X \in g$ maka X tunggal dari X oleh T_2 , Berdasarkan 2.2, $\forall X \in V$ dan $X \notin g$. Ada tunggal garis tegak lurus kepada g melalui X . Hal ini mengakibatkan

tunggalnya titik tengah ruas garis tegak lurus dari X ke g . Jadi, untuk $X \in V$ dan $X \notin g$, ada tunggal peta anggota V yang memenuhi 2.2, jadi T_2 suatu fungsi dari V ke V .

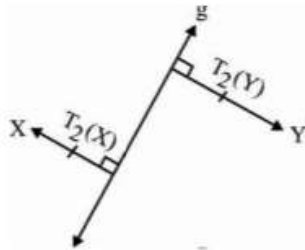
b. T_2 fungsi bijektif

1) T_2 fungsi kepada

Ambil sebarang $Y \in V$. Apabila $Y \in g$, ada prapeta Y oleh T_2 , Apabila $Y \notin g$, ada tunggal garis l yang tegak g melalui Y . Misalnya, $[N] = g \cap l$. Akhirnya ada garis $\overleftrightarrow{NY}$. Hal ini mengakibatkan ada ruas garis $\overleftrightarrow{NX}$ sehingga $Y \in \overleftrightarrow{NX}$ dan $\overleftrightarrow{YN} = \overleftrightarrow{XY}$. Dari uraian ini, ada X sehingga $\overleftrightarrow{YX} \perp g$ dan $Y = T_2(X)$. jadi T_2 fungsi kepada.

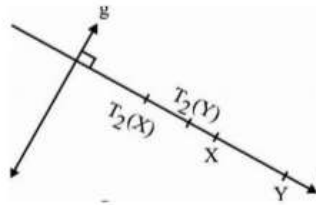
2) T_2 fungsi satu-satu

Ambil dua titik sebarang $X, Y \in V$ sehingga $X \neq Y$, untuk X, Y pada sisi yang berbeda oleh garis g , $T_2(X) \neq T_2(Y)$ sebab $T_2(X)$ dan $T_2(Y)$ terletak pada sisi yang berbeda oleh garis g . Perhatikan Gambar 1.2



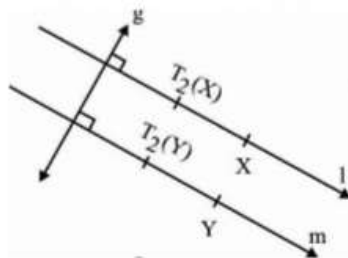
Gambar 1.2

Untuk X, Y pada sisi yang sama dengan g , dengan $\overrightarrow{XY} \perp g$. Karena $\overrightarrow{XY} \perp g$ maka jarak dari X ke g dengan jarak dari Y ke g berbeda. Akibatnya $T_2(X) \neq T_2(Y)$ sebab jarak dari $T_2(X)$ ke g separuh jarak dari X ke g . sementara itu, jarak dari $T_2(Y)$ ke g separuh jarak dari Y ke g . Sementara itu, jarak dari $T_2(Y)$ ke g separuh jarak dari Y ke g . Perhatikan Gambar 1.3



Gambar 1.3

Untuk X, Y pada sisi yang sama oleh g , $\overrightarrow{XY}$ tidak tegak lurus g . Hal ini berakibat ada garis l melalui X tegak lurus g dan garis m melalui Y tegak lurus g , $g \parallel l$. Karena $T_2(X) \in l$, $T_2(Y) \in m$ dan $l \parallel m$ maka $T_2(X) \neq T_2(Y)$, perhatikan gambar 1.4, jadi T_2 fungsi satu-satu.



Gambar 1.4

Karena T_2 fungsi kepada dan satu-satu, T_2 pun suatu fungsi bijektif. Dengan demikian T_2 merupakan fungsi dari V kepada V dan bijektif sehingga T_2 merupakan fungsi dari V kepada V dan bijektif sehingga T_2 disebut sebagai suatu transformasi.

2. Ambil sumbu x sebagai garis g dan sumbu y sebagai garis yang melalui titik A tegak lurus garis g . Akibatnya, titik A dapat dimisalkan berkoordinat $(0,b)$, ambil sebarang titik $P(x, y) \in V$, didapat

$$T_1(P) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}b + y \right) \text{ merupakan titik tengah}$$

$$AP, \forall P(x, y) \in V.$$

$$T_2(P) = \left(x, \frac{1}{2}y \right), \forall P(x, y) \in V,$$

Pandang

$$T_1 \circ T_2 (P) = T_1[T_2 (P)] = T_1\left(x, \frac{1}{2}y\right) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{2}y\right)\right)$$

$$T_2 \circ T_1 (P) = T_2[T_1 (P)] = T_2\left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}(b + y)\right) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{4}(b + y)\right)$$

$$\text{Jadi } T_1 \circ T_2 (P) \neq T_2 \circ T_1 (P), \forall P(x, y) \in V$$

Maka itu, $T_1 \circ T_2 \neq T_2 \circ T_1$ akibat dari contoh ini, dapat di Tarik kesimpulan bahwa pada komposisi transformasi tidak bersifat komutatif.

Teorema 1.4

Komposisi transformasi bersifat asosiatif

C. Transformasi Balikan (invers)

Definisi 1.13

Suatu transformasi ε disebut (.....) jika dan hanya jika setiap $P \in V$ berlaku $\varepsilon(P) = P$.

Teorema 1.5

Jika T suatu transformasi dan ε suatu (.....), berlaku $T \circ \varepsilon = \varepsilon \circ T = T$

Definisi 1.14

Suatu transformasi T_1 disebut (.....) (invers) dari transformasi T jika dan hanya jika berlaku

$$T_1 \circ T = T \circ T_1 = \varepsilon$$

Teorema 1.6

Setiap transformasi T mempunyai satu transformasi balikan (invers)

Teorema 1.7

Misalkan diberikan dua buah transformasi T_1 dan T_2 , maka $(T_1 \circ T_2)^{-1} = T_2^{-1} \circ T_1^{-1}$

Rangkuman

1. Himpunan semua transformasi terhadap operasi komposisi " $\circ$ " membentuk grup yang disebut grup transformasi.
2. Langkah pengkajian untuk menyatakan suatu relasi T merupakan suatu transformasi adalah analisis sebagai berikut:
 - a) T fungsi dari V ke V
 - b) T fungsi bijektif
 - 1) T fungsi kepada
 - 2) T fungsi satu-satu
3. Jika T_1 dan T_2 transformasi, $T_1 \circ T_2$ juga merupakan transformasi.
4. Untuk setiap transformasi T_1, T_2 , dan T_3 berlaku $(T_1 \circ T_2) \circ T_3 = T_1 \circ (T_2 \circ T_3)$.
5. Jika T_1 dan T_2 transformasi, $(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$.
6. Jika T_1 dan T_2 transformasi, maka komposisi transformasi dari T_1 dan T_2 ditetapkan sebagai: $(T_1 \circ T_2)(P) = T_1[T_2(P)], \forall P \in V$.
7. T_1 disebut transformasi balikan(invers) dari transformasi T jika dan hanya jika $T_1 \circ T = T \circ T_1 = \mathcal{E}$.

Tes Formatif Modul 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1. Diberikan $A =$ semua bilangan asli, Relasi $R = \{(x, y) | x, y \in A, \text{ dan } 2x + y = 10\}$. Domain dan range dari relasi R adalah....
 - A. Domain = $\{(1,8), (2,6), (3,4), (4,2)\}$,
Range = $\{8,6,4,2\}$.
 - B. Domain = $\{1, 2, 3, 4\}$, Range = $\{8,6,4,2\}$.
 - C. Domain = $\{(8,1), (6,2), (4,3), (2,4)\}$,
Range = $\{1,2,3,4\}$.
 - D. Domain = $\{2, 4, 6, 8\}$, Range = $\{1,2,3,4\}$.
2. Diberikan $A = \{2,4,6,8\}$. Relasi pada A yang merupakan relasi refleksi adalah....
 - A. $[(2,2), (2,4), (2,6), (4,6), (6,8), (8,2), (8,4)]$
 - B. $[(2,2), (2,4), (2,6), (4,6), (6,8), (8,2), (8,8)]$
 - C. $[(2,4), (4,4), (2,6), (4,6), (6,6), (6,8), (8,8)]$
 - D. $[(2,2), (2,4), (4,4), (2,6), (6,6), (6,8), (8,8)]$
3. Diberikan $C = \{a,b,c,d\}$. Relasi pada C yang merupakan relasi transitif adalah....
 - A. $[(a,a), (c,c), (d,d)]$
 - B. $[(a,b), (b,c), (c,d), (a,c)]$
 - C. $[(b,c), (d,c), (c,a), (b,d)]$
 - D. $[(d,c), (c,c), (d,e), (c,a), (b,d), (d,a)]$
4. Diberikan $R =$ himpunan semua bilangan real,
Relasi-relasi f di bawah ini yang merupakan fungsi pada R adalah....

- A. $f(x) = \frac{x-1}{x^2-5x+6}$
- B. $f(x, y) = \{(x, y) | 2x^2 + y^2 = 1, x \in R, y \in R\}$
- C. $f(x, y) = \{(x, y) | xy = 1\}$
- D. $f(x) = x - 2$
5. diberikan R = himpunan bilangan real. Di antara fungsi-fungsi f di bawah ini yang merupakan fungsi satu-satu dari R ke R adalah.....
- A. $f(x) = -x^2$
- B. $f(x) = x^2 + 1$
- C. $f(x) = 4x - 2$
- D. $f(x) = x^4$
6. Diberikan sebuah lingkaran dengan jari-jari r dan pusatnya di titik A ditetapkan relasi T sebagai berikut untuk setiap titik $P \in V$.
- i) $T(P) = A$, jika $P = A$.
- ii) $T(P) = Q$ Sehingga $AP \cdot AQ = r^2$, jika $P \neq A$.
- Pernyataan yang benar berikut ini adalah....
- A. T bukan fungsi dari V ke V
- B. T fungsi dari V ke V
- C. T suatu transformasi
- D. T mempunyai balikan
7. Diberikan T_1 dan T_2 merupakan suatu transformasi, pernyataan yang benar adalah.....
- A. $(T_1^{-1})^{-1} = T_1$
- B. $(T_1 \circ T_2)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$
- C. T_1^{-1} dan T_2^{-1} belum tentu transformasi
- D. $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$

8. Diberikan T suatu transformasi. Pernyataan yang benar adalah....

- A. Semua titik pada bidang V berpindah tempat oleh T
- B. Ada titik pada bidang V yang tidak berpindah tempat oleh T
- C. Semua titik pada V mempunyai peta oleh T
- D. Tidak semua titik pada V mempunyai prapeta oleh T

Untuk soal no 9) dan no 10) pilihlah

- A. Jika 1 dan 2 benar
- B. Jika 1 dan 3 benar
- C. Jika 2 dan 3 benar
- D. Jika 1, 2, dan 3 semuanya benar

9. Diberikan relasi γ himpunan semua transformasi dan " $\circ$ " operasi komposisi. Pernyataan yang benar adalah...

- 1. Relasi identitas ε yang ditetapkan
 $\varepsilon(P) = P, \forall P \in V$ maka $\varepsilon \in \gamma$
- 2. " $\circ$ " tertutup pada γ
- 3. Jika T_1 dan $T_2 \in \gamma$ maka $T_1 \circ T_2 \notin \gamma$.

10. Jika V bidang Euclides, relasi-relasi dari V ke V berikut ini

yang merupakan transformasi adalah.....

- 1. $T_1(P) = (x+1, 2y), \forall P(x, y) \in V$
- 2. $T_2(P) = (x, y-1), \forall P(x, y) \in V$
- 3. $T_3(P) = (\frac{1}{2}x, y-2), \forall P(x, y) \in V$

Modul 2

Isometri dan Pencerminan

Kegiatan Belajar 1 : Isometri

A. Pengertian Isometri

Definisi 2.1

Misalkan T suatu transformasi, transformasi T ini disebut (.....) jika dan hanya jika untuk setiap pasangan titik P dan Q anggota dari bidang Euclides V berlaku bahwa $\overline{P'Q'} = \overline{PQ}$ dimana $P' = T(P)$ dan $Q' = T(Q)$.

Contoh 2.1

Misalkan diketahui garis g pada bidang V . pandang transformasi T yang ditetapkan sebagai berikut:

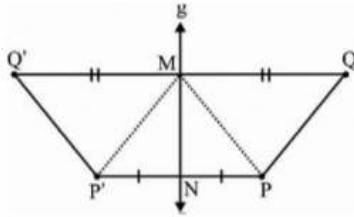
- Jika $P \in g$ maka $T(P) = P$.
- Jika $P \notin g$ maka $T(P) = P'$ sehingga g sumbu dari $\overline{PP'}$. Apakah transformasi T ini suatu isometri atau bukan?

Penyelesaian :

Sesuai definisi 2.1 ambil sembarang dua titik P dan Q anggota dari V . selanjutnya misalkan $T(P) = P'$ dan $T(Q) = Q'$. dari pemisalan $T(P) = P'$ dan $T(Q) = Q'$. akan diperoleh dua hal yaitu:

- g sumbu dari $\overline{PP'}$, apabila misalkan $g \cap \overline{PP'} = \{N\}$ maka $\overline{PN} = \overline{NP'}$.
- g sumbu dari $\overline{QQ'}$, apabila misalkan $g \cap \overline{QQ'} = \{M\}$ maka $\overline{QM} = \overline{MQ'}$.

Sekarang, perhatikan gambar 2.1 hubungkan masing-masing P dan Q , P' dan Q' , P dan M , serta P' dan M .



Gambar 2.1

Kemudian, perhatikan $\triangle PNM$ dengan $\triangle P'NM$.

Karena $PN = NP'$, $\angle PNM \cong \angle P'NM$ (sudut siku-siku) dan $NM = NM$ maka $\triangle PNM \cong \triangle P'NM$. Akibatnya :

1. $PM = P'M$
2. $\triangle PMN \cong \triangle P'MN$

Sekarang, pandang $\triangle PQM$ dengan $\triangle P'Q'M$.

$$PM = P'M$$

$$\angle NMQ \cong \angle NMQ' \text{ (siku-siku)}$$

$$\angle PMN \cong \angle P'MN$$

$$\angle PMQ = \angle NMQ - \angle PMN$$

$$\angle P'MQ' = \angle NMQ' - \angle P'MN$$

$$\angle P'MQ' = \angle NMQ - \angle PMN$$

$$\text{Akibatnya : } \angle PMQ \cong \angle P'MQ'$$

$$QM = Q'M$$

$$\text{Dari (1), (2), dan (3) disimpulkan } \angle PQM \cong \angle P'Q'M$$

$$\text{Akibatnya, } PQ = P'Q'.$$

Karena P dan Q diambil sebarang titik pada V, dapat disimpulkan bahwa setiap pasangan titik P dan Q pada V berlaku $P'Q' = PQ$. Jadi, transformasi T yang ditetapkan memenuhi definisi 2.1. Maka itu, dapat disimpulkan bahwa transformasi T merupakan suatu isometri.

B. Sifat-Sifat Isometri

Teorema 2.1

Setiap (.....) bersifat:

- a) Memetakan garis menjadi garis
- b) Mengawetkan ukuran sudut
- c) Mengawetkan kesejajaran

Teorema 2.2

Apabila garis g dan h saling tegak lurus dan T suatu isometri, maka $T(g)$ dan $T(h)$ juga saling tegak lurus.

Teorema 2.3

Komposisi dua buah isometri adalah sebuah (.....).

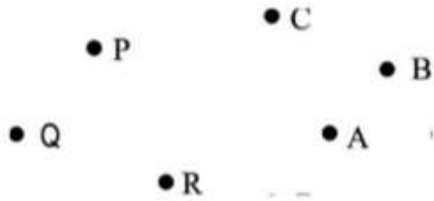
C. Isometri Langsung Dan Isometri Lawan

Definisi 2.2

Misalkan (P_1, P_2, P_3) adalah ganda tiga titik yang tidak kolinear. Apabila urutan perputaran P_1, P_2 ke P_3 sesuai dengan perputaran jarum jam, (P_1, P_2, P_3) disebut memiliki orientasi negative. Apabila urutan perputaran P_1, P_2 ke P_3 berlawanan dengan perputaran jarum jam, (P_1, P_2, P_3) disebut memiliki (.....).

Contoh 2.2

Misalkan diberikan enam buah titik (lihat gambar 2.2). Karena urutan perputaran A, B , ke C berlawanan dengan perputaran jarum jam, maka (A, B, C) berorientasi positif. Sedangkan urutan perputaran P, Q , ke R sesuai dengan perputaran jarum jam, akibatnya (P, Q, R) berorientasi negative.



Gambar 2.2

Definisi 2.3

Misalkan T suatu transformasi. T disebut (.....) apabila setiap ganda tiga titik (P_1, P_2, P_3) yang tidak kolinear orientasinya sama dengan orientasi dari petanya. Sementara itu, lainnya disebut tidak mengawetkan orientasi.

Definisi 2.4

Suatu transformasi T disebut (.....) jika dan hanya jika transformasi itu mengawetkan orientasi. Sementara itu, transformasi T disebut transformasi lawan jika dan hanya jika transformasi itu tidak mengawetkan orientasi.

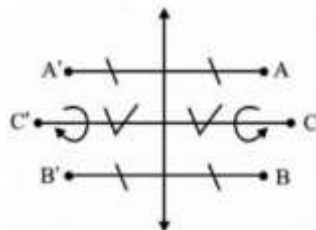
Definisi 2.5

(.....) adalah isometri yang merupakan transformasi langsung, sedangkan isometri lawan adalah isometri yang merupakan transformasi lawan.

Contoh 2.3

Perhatikan transformasi yang ditetapkan dalam contoh 2.1, sudah ditelusuri bahwa transformasi T ini merupakan suatu isometri. Apakah T merupakan isometri langsung atau isometri lawan?

Perhatikan gambar 2.3. misalkan ambil tiga titik tak kolinear sebarang; A, B, dan C. Kemudian, cari $T(A)$, $T(B)$, dan $T(C)$. misalkan $T(A)=A'$, $T(B)=B'$ dan $T(C)=C'$.



Gambar 2.3

Karena (A, B, C) berorientasi positif, sedangkan (A', B', C') berorientasi negatif, maka transformasi T merupakan transformasi lawan. Akibatnya, T suatu isometri lawan.

Rangkuman

1. Transformasi T disebut isometri jika dan hanya jika untuk setiap pasangan titik P dan Q pada bidang Euclides V berlaku $P'Q' = PQ$ dimana $P' = T(P)$ dan $Q' = T(Q)$.
2. Setiap isometri bersifat
 - a. Memetakan garis menjadi garis
 - b. Mengawetkan ukuran sudut
 - c. Mengawetkan kesejajaran.
3. Jika $g \perp h$ dan T suatu isometri, $T(g) \perp T(h)$.
4. Komposisi dua buah isometri adalah sebuah isometri
5. Isometri langsung adalah isometri yang mengawetkan orientasi dan isometri lawan adalah isometri yang tidak mengawetkan orientasi.

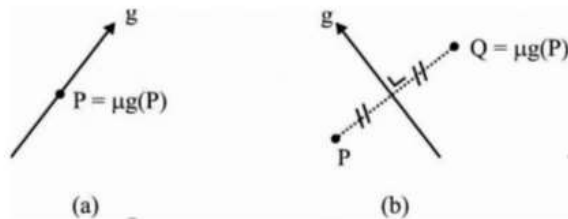
Kegiatan Belajar 2 : Pencerminan

A. Pengertian pencerminan

Definisi 2.6

Sebuah (.....) pada sebuah garis g adalah fungsi μ_g yang ditetapkan untuk setiap titik P pada bidang Euclides V sebagai berikut:

- a) Jika $P \in g$ maka $\mu_g(P) = P$ (Gambar 2.4a)
- b) Jika $P \notin g$ maka $\mu_g(P) = Q$ sehingga g merupakan sumbu dari $\overline{PQ}$ (Gambar 2.4b)

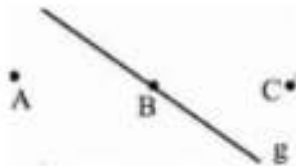


Gambar 2.4

Selanjutnya, g disebut sumbu refleksi (cermin) μ_g .

Contoh 2.4

Misalkan diberikan titik A, B , dan C serta garis g , seperti pada gambar 2.5 dibawah ini.



Gambar 2.5

Lukis:

- a) Titik A' sehingga $A' = \mu_g(A)$

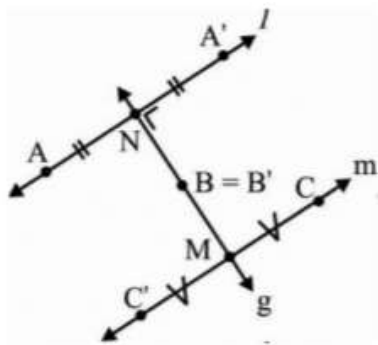
- b) Titik B' sehingga $B' = \mu_g(B)$
- c) Titik C' sehingga $C' = \mu_g(C)$

Penyelesaian

- a) Karena $A' = \mu_g(A)$ dan $A \notin g$ maka g merupakan sumbu dari $\overline{AA'}$, artinya, A' terletak pada garis l yang melalui A dan tegak lurus terhadap g. apabila $\{N\} = l \cap g$ maka $AN = NA'$ dan A dengan A' terletak pada sisi yang berbeda oleh g.
- b) Karena $B' = \mu_g(B)$ dan $B \in g$ maka $B' = B$.
- c) Karena $C' = \mu_g(C)$ dan $C \notin g$ maka G merupakan sumbu dari $\overline{CC'}$. Akibatnya, C' terletak pada garis m yang melalui C dan tegak lurus g sehingga jika $\{M\} = m \cap g$ maka $CM = MC'$ dan C dengan C' terletak pada sisi yang berbeda oleh g.

Lukisan

- a) Buat garis l melalui A tegak lurus g. cari $\{N\} = l \cap g$.
Buatlah ruas garis $\overline{NA'} \cong \overline{AN}$ sehingga $\overline{NA'} \in l$ dan A' dengan A terletak pada sisi yang berbeda oleh g.
- b) Jelas
- c) Buat garis m melalui C tegak lurus g. cari $\{M\} = m \cap g$. Buatlah ruas garis $\overline{MC'} \cong \overline{CM}$ sehingga $\overline{MC'} \in m$ dan C' dengan C terletak pada sisi yang berbeda oleh g.



Gambar 2.6

B. Pencerminan Sebagai Suatu Isometri

Teorema 2.4

Setiap pencerminan pada garis merupakan suatu isometri lawan

Definisi 2.7

Suatu transformasi yang balikkannya adalah transformasi itu sendiri disebut (.....).

Teorema 2.5

Setiap pencerminan pada garis merupakan suatu involusi.

C. Persamaan pencerminan pada garis

Bahasan pada persamaan pencerminan pada garis dibatasi hanya pada garis yang istimewa. Adapun ruas-rumus (.....) pada garis-garis istimewa ini tertuang pada teorema berikut dan pembuktiannya hanya salah satu.

Teorema 2.6

Misalkan μ_g pencerminan pada garis g dan $P(x,y) \in V$, apabila:

- a) $g = \{(x,y) | x=0\}$ maka $\mu_g(P) = (-x, y)$
- b) $g = \{(x,y) | x=a\}$ maka $\mu_g(P) = (2a-x, y)$
- c) $g = \{(x,y) | y=b\}$ maka $\mu_g(P) = (x, 2b-y)$
- d) $g = \{(x,y) | y=x\}$ maka $\mu_g(P) = (y, x)$
- e) $g = \{(x,y) | y=-x\}$ maka $\mu_g(P) = (-y, -x)$
- f) $g = \{(x,y) | y=mx\}$ maka $\mu_g(P) = \left(\frac{(1-m^2)x+2my}{1+m^2}, \frac{2mx+(m^2-1)y}{1+m^2} \right)$

Contoh 2.5

Diketahui garis $g = \{(x,y) | y=x\}$ dan $h = \{(x,y) | y=0\}$ serta titik-titik A(1,4) dan B(-2,1).

Tentukan :

- a) A' sehingga $A' = \mu_g \circ \mu_h . A$
- b) A' sehingga $A' = \mu_h \circ \mu_g . A$

Penyelesaian:

- a) Karena $g = \{(x,y) | y=x\}$ maka $\mu_g(P) = (y, x), \forall P(x,y)$
dan $h = \{(x,y) | y=0\}$ maka $\mu_h(P) = (x, -y), \forall P(x,y)$.

Jadi,

$$\mu_g \circ \mu_h(P) = \mu_g[\mu_h(P)] = \mu_g[(x, -y)] = (-y, x), \forall P(x,y)$$

Koordinat A' dapat dicari dengan memakai rumus komposisi dua pencerminan diatas, yaitu $A' =$

$$\mu_g \circ \mu_h(A) = (\mu_g \circ \mu_h)[(1,4)] = (-3,1).$$

$$b) B = (\mu_g \circ \mu_h)(B')$$

$$\Leftrightarrow (\mu_g \circ \mu_h)^{-1}(B) = (\mu_g \circ \mu_h)^{-1} \circ (\mu_g \circ \mu_h)^{-1}(B')$$

$$\Leftrightarrow (\mu_g^{-1} \circ \mu_h^{-1})(B) = \in (B')$$

$$\Leftrightarrow (\mu_h \circ \mu_g)(B) = B'$$

$$\mu_h \circ \mu_g(P) = (\mu_h[\mu_g(P)] = \mu_h[(y, x)] = (y, -x), \forall P(x, y)$$

$$\text{Jadi, } B' = (\mu_h \circ \mu_g)(B) = \mu_h \circ \mu_g[(-2, 1)] = (1, 2)$$

Contoh 2.6

Diketahui garis $g = \{(x, y) | y = -x\}$ dan $h = \{(x, y) | 3y = x + 3\}$. Tentukan persamaan garis h' sehingga $h' = \mu_g(h)$.

Penyelesaian

$$g = \{(x, y) | y = -x\} \text{ maka } \mu_g(P) = (-y, -x), \forall P(x, y)$$

Misalkan $Q(x_0, y_0) \in h$ maka diperoleh hubungan,

$$3y_0 = x_0 + 3$$

$$\mu_g(Q) = \mu_g(x_0, y_0) = (-y_0, -x_0). \text{ misalkan } \mu_g(Q) = (x, y)$$

maka diperoleh hubungan $(-y_0, -x_0) = (x, y)$

$$\Leftrightarrow -y_0 = x \text{ dan } -x_0 = y$$

$$\Leftrightarrow y_0 = -x \text{ dan } x_0 = -y$$

Apabila (2) disubstitusikan pada 1 akan diperoleh,

$$3(-x) = (-y) + 3$$

$$Y = 3x + 3$$

Jadi, $h' = \{(x, y) | y = 3x + 3\}$.

Rangkuman

1. Pencerminkan pada sebuah garis g adalah fungsi μ_g yang ditetapkan $\forall P \in V$ sebagai berikut.
 - a) Jika $P \in g$ maka $\mu_g(P) = P$.
 - b) Jika $P \notin g$ maka $\mu_g(P) = Q$, g sumbu datar $\overline{PQ}$
2. Jarak Antara peta ke garis cermin dengan prapeta ke garis cermin adalah sama.
3. Pencerminkan merupakan suatu isometri lawan.
4. Pencerminkan merupakan suatu involusi
5. Pencerminkan mempunyai titik invariant tak terhingga banyak.

Tes Formatif Modul 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

Untuk soal nomor 1 dan 2

- A. Jika 1 dan 2 benar
- B. Jika 1 dan 3 benar
- C. Jika 2 dan 3 benar
- D. Jika 1, 2, dan 3 semuanya benar

1) Pernyataan-pernyataan yang benar berikut ini adalah.....

- 1. Jika T suatu isometri maka T suatu transformasi.
- 2. Jika T suatu transformasi maka T suatu isometrei
- 3. Suatu transformasi yang memetakan garis menjadi garis adalah isometri.

2) Pernyataan yang benar berikut ini adalah

- 1. Komposisi isometri bersifat asosiatif
- 2. Komposisi isometri bersifat komutatif
- 3. Setiap isometri mempunyai balikan

3) Diberikan titik -titik A(2, -1), B(4,0), C(-4,1), dan D (-2,k). apabila T suatu isometri sehingga $T(A) = C$ dan $T(B) = D$, besar k adalah...

- A. -2
- B. -1
- C. 1
- D. 2

4) Diberikan relasi T dengan rumus: $T[(x, y)] = (kx, y), \forall (x, y) \in V$. Agar T suatu isometri, syaratnya adalah...

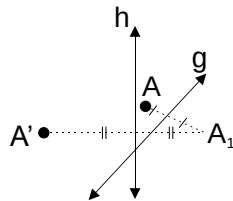
- A. $k \in \{0\}$
- B. $k \in \{-1, 1\}$
- C. $k \in \{1\}$
- D. $k \in \{-1, 0, 1\}$

5) Apabila T_1, T_2, T_3 , dan T_4 masing-masing isometri, $(T_1 \circ T_2 \circ T_3 \circ T_4)^{-1} =$

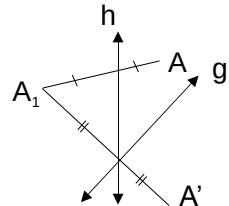
- A. $T_4^{-1} \circ T_3^{-1} \circ T_2^{-1} \circ T_1^{-1}$
- B. $T_1^{-1} \circ T_3^{-1} \circ T_2^{-1} \circ T_1^{-1}$
- C. $T_1^{-1} \circ T_2^{-1} \circ T_3^{-1} \circ T_4^{-1}$

6) Lukislah dibawah ini yang menyatakan bahwa $A' = (\mu_g \circ \mu_h)(A)$ adalah...

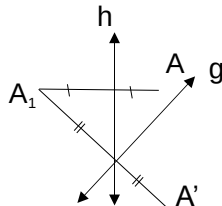
A.



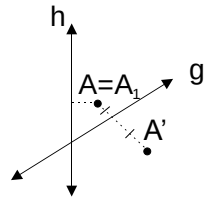
B.



C.



D.



7) Diberikan garis $g = \{(x, y) | y = -2x\}$ dan titik $B = (-1, 2)$. Koordinat titik C sehingga $B = \mu_g(C)$ adalah

- A. (-1, -2)
- B. (-1, 2)
- C. (1, 2)
- D. (1, -2)

8) Diberikan garis $g = \{(x, y) | y = 1\}$ dan $h = \{(x, y) | x + y + 1 = 0\}$. Persamaan garis $h' = \mu_g(h)$ adalah...

- A. $\{x, y | y - x + 3 = 0\}$
- B. $\{x, y | x + y - 1 = 0\}$
- C. $\{x, y | y - x - 1 = 0\}$
- D. $\{x, y | x - y + 3 = 0\}$

9) Diberikan garis $g = \{(x, y) | kx - 3y + 1 = 0\}$ dan titik $B(3, 1)$. Nilai k sehingga $\mu_g(B) = B$ adalah...

A. $-\frac{4}{3}$

B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $-\frac{2}{3}$

10) Diberikan $h = \{(x, y) | 2x + 2ky + 1 = 0\}$, titik $A(2, -1)$, dan $C = \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$. Nilai k sehingga $\mu_h(C) = A$ adalah...

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

Modul 3

Setengah putaran dan ruas garis berarah

Kegiatan belajar 1 : Setengah Putaran

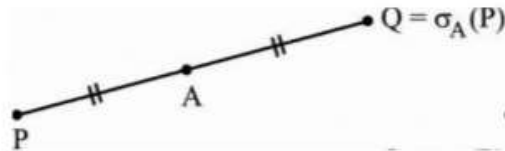
A. Pengertian setengah putaran

Setengah putaran merupakan keadaan khusus pencerminan, yaitu pencerminan terhadap suatu titik. “Garis sumbu” dalam pencerminan diambil alih perannya oleh (.....) setengah putaran.

Definisi 3.1

Misalkan V bidang euclides dan A titik tertentu pada bidang V . (.....) pada titik A adalah fungsi σ_A yang didefinisikan untuk setiap titik P pada V sebagai berikut:

- 1) Apabila $P = A$, maka $\sigma_A(P) = A$
- 2) Apabila $P \neq A$, maka $\sigma_A(P) = Q$ sehingga A titik tengah ruas garis $\overline{PQ}$.



Gambar 3.1

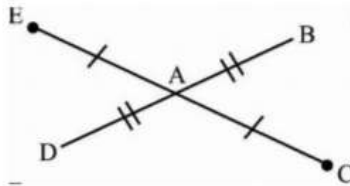
Contoh 3.1

Diberikan A, B , dan C adalah titik-titik pada bidang Euclides V . Lukis:

- a) Titik D sehingga $D = \sigma_A(B)$.
- b) Titik E sehingga $C = \sigma_A(E)$

Penyelesaian:

- a) $D = \sigma_A(B)$ berdasarkan definisi 3.1, A adalah titik tengah $\overline{BD}$. Karena $B \neq A$, maka ada ruas garis $\overline{BA}$. Kemudian perpanjangan ruas garis $\overline{BA}$ ke arah titik A sehingga memperoleh ruas garis $\overline{AD}$ yang ekuivalen dengan ruas garis $\overline{BA}$. Akibatnya ruas garis $\overline{BD}$ dimana A merupakan titik tengah ruas garis $\overline{BD}$. Artinya $D = \sigma_A(B)$.
- b) $C = \sigma_A(E)$ berdasarkan definisi 3.1, A adalah titik tengah $\overline{EC}$. Karena $C \neq A$, maka ada ruas garis $\overline{CA}$. Kemudian perpanjangan ruas garis $\overline{CA}$ ke arah titik A sehingga memperoleh ruas garis $\overline{AE}$ yang ekuivalen dengan ruas garis $\overline{CA}$. Akibatnya mendapatkan ruas garis $\overline{EC}$, titik A sebagai titik tengahnya, artinya $C = \sigma_A(E)$.



Gambar 3.2

1. Setengah putaran sebagai suatu isometri
Teorema 3.1
Setiap setengah putaran adalah suatu isometri
2. Sifat- sifat setengah putaran
Teorema 3.2

Apabila garis-garis g dan h berpotongan tegak lurus dititik A , maka $\sigma_A = \mu_g \circ \mu_h$.

Teorema 3.3

Apabila $g \perp h$ maka $\mu_g \circ \mu_h = \mu_h \circ \mu_g$.

Teorema 3.4

Setiap setengah putaran adalah (.....).

3. Persamaan setengah putaran

Teorema 3.5

Apabila $A(a,b)$ dan $P(x,y)$ sebarang titik, maka $\sigma_A(P) = (2a - x, 2b - y)$

B. Lanjutan setengah putaran

Sifat – sifat setengah putaran dan pencerminan disebabkan ketentuan invarian, kolineasi, dan dilatasi.

Definisi 3.2

Misalkan A suatu titik tertentu pada bidang Euclides dan T suatu transformasi. Titik A disebut (.....) pada transformasi T jika dan hanya jika berlaku $T(A) = A$.

Teorema 3.6

Setiap refleksi pencerminan pada garis mempunyai tak hingga (.....).

Teorema 3.7

Setiap (.....) mempunyai tepat satu titik invarian.

Definisi 3.3

Sebuah transformasi T yang mempunyai sifat bahwa sebuah garis petanya adalah sebuah garis maka T disebut (.....).

Teorema 3.8

Setiap refleksi pada garis merupakan suatu kolineasi.

Definisi 3.4

Suatu kolineasi yang mempunyai sifat bahwa peta dan prapeta suatu garis akan sejajar disebut (.....).

Teorema 3.10

Setiap setengah putaran merupakan dilatasi

Teorema 3.11

Komposisi dua setengah putaran dengan pusat yang berbeda memiliki titik invariant.

Teorema 3.12

Apabila diberikan titik A dan B sehingga $A \neq B$, maka hanya ada satu buah setengah putaran yang memetakan A ke B .

Teorema 3.13

Apabila T suatu transformasi, L himpunan titik-titik dan A sebuah titik tertentu maka $A \in T(L)$ jika dan hanya jika $T^{-1}(A) \in L$.

Contoh 3.3

Diberikan $L = \{(x, y) \mid x^2 + 4y^2 = 16\}$, $A(4, -3)$ dan $B(3, 1)$.

Jika g adalah sumbu x , selidiki apakah $A \in (\mu_g \circ \sigma_B)(L)$?

Penyelesaian

$$\begin{aligned}(\mu_g \circ \sigma_B)^{-1} &= \sigma_B^{-1} \circ \sigma_g^{-1} = \sigma_B \circ \sigma_g \\ \sigma_B[(x, y)] &= (2.3 - x, 2.1 - y) = (6 - x, 2 - y), \forall (x, y) \in V \\ \mu_g[(x, y)] &= (x, -y), \forall (x, y) \in V\end{aligned}$$

Maka,

$$\begin{aligned}(\mu_g \circ \sigma_B)^{-1}[(x, y)] \\ &= (\sigma_B \circ \mu_g)[(x, y)] \\ &= \sigma_B[(\mu_g(x, y))] \\ &= (6 - x, 2 + y)\end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}(\mu_g \circ \sigma_B)^{-1}(A) \\ &= (6 - 4, 2 - 3) \\ &= (2, 1)\end{aligned}$$

Karena $(2)^2 + 4(1)^2 = 4 + 4 = 8 \neq 16$, maka $(2, -1) \notin L$ atau $(\mu_g \circ \sigma_B)^{-1}(A) \notin L$. Berdasarkan teorema 3.13, bahwa $A \notin (\mu_g \circ \sigma_B)(L)$.

dengan mempelajari uraian-uraian diatas, diharapkan memperoleh gambaran serta pemahaman yang cukup mengenai pengertian setengah putaran, sifat-sifat setengah putaran, dan persamaan setengah putaran.

Rangkuman

1. Setengah putaran pada titik A adalah fungsi σ_A yang didefinisikan untuk setiap titik P pada bilangan Euclides V sebagai berikut.
 - a. Apabila $P=A$, maka $\sigma_A(P)=A$.
 - b. Apabila $P \neq A$, maka $\sigma_A(P)=Q$ sehingga A titik tengah ruas garis $\overline{PQ}$.
2. Setengah putaran adalah suatu isometri.
3. Setengah putaran merupakan komposisi dari dua pencerminan dengan kedua cerminnya saling tegak lurus dan melalui pusat putaran.
4. Setengah putaran merupakan suatu involusi.
5. Setengah putaran hanya mempunyai satu titik invariant
6. Persamaan setengah putaran $\sigma_A(P) = (2a-x, 2b-y)$ jika $P(x,y)$ dan $A(a,b)$.
7. Setiap pencerminan pada garis mempunyai tak hingga titik invariant
8. Setiap pencerminan pada garis merupakan kolineasi.
9. Setiap setengah putaran merupakan suatu kolineasi
10. Setiap setengah putaran merupakan dilatasi.
11. Komposisi dua setengah putaran dengan pusat yang berbeda tidak memiliki invariant.
12. Jika diberikan titik A dan B sehingga $A \neq B$ maka hanya ada satu buah setengah putaran yang memetakan A ke B.
13. Jika T suatu transformasi, L himpunan titik-titik dan A sebuah titik tertentu maka $A \in T(L)$ jika dan hanya jika $T^{-1}(A) \in L$

Kegiatan belajar 2 : Ruas garis berarah

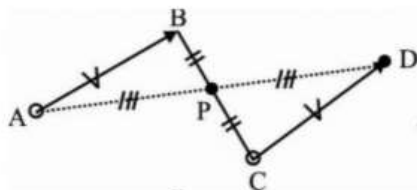
A. Pengertian ruas garis berarah

Definisi 3.5

Suatu ruas (.....) adalah ruas garis yang salah satu ujungnya dinamakan pangkal dan ujung lainnya dinamakan akhir. Apabila A dan B dua titik, $\overrightarrow{AB}$ ditetapkan sebagai ruas garis berarah dengan pangkal titik A dan akhir titik B.

Definisi 3.6

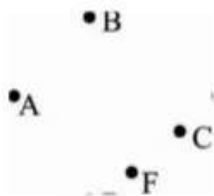
$\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD}$ (dibaca garis AB ekuivalen dengan ruas garis CD) apabila $\sigma_P(A) = D$ dengan P titik tengah $\overline{BC}$.



Gambar 3.3

Contoh 3.4

Diberikan titik A,B,C, dan F pada bidang Euclides seperti gambar 3.14.



Gambar 3.4

Lukis :

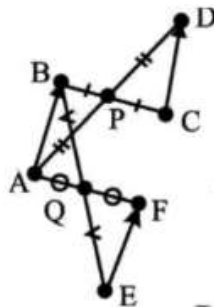
a) D sehingga $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD}$

b) E sehingga $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{EF}$

Penyelesaian

a) $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD}$, apabila $\sigma_p(A) = D$, dengan P titik tengah $\overline{BC}$ maka titik D diperoleh dengan cara mencari titik tengah $\overline{BC}$, kemudian beri nama titik P, selanjutnya cari D sehingga $D = \sigma_p(A)$.

b) $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{EF}$, apabila $\sigma_Q(A) = F$, dengan Q titik tengah $\overline{BE}$. Karena $\sigma_Q(A) = F$ maka Q merupakan titik tengah $\overline{AF}$. Karena Q titik tengah $\overline{BE}$, maka $\sigma_Q(B) = E$. Sehingga titik E diperoleh dengan cara mencari titik tengah $\overline{AF}$, yaitu titik Q, kemudian mencari titik E sehingga $E = \sigma_Q(B)$.



Gambar 3.5

B. Sifat-sifat ruas garis berarah

Teorema 3.14

Apabila $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ (.....) maka segiempat ABCD sebuah jajaran gnjang jika dan hanya jika $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Teorema 3.15

Relasi " $\cong$ " pada himpunan ruas garis berarah merupakan (.....). Artinya, apabila diberikan $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, dan $\overrightarrow{EF}$ maka

- $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{BA}$ (Sifat refleksi)
- Jika $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD}$ maka $\overrightarrow{CD} \cong \overrightarrow{AB}$ (sifat simetri)
- Jika $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD}$ dan $\overrightarrow{CD} \cong \overrightarrow{EF}$ maka $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{EF}$ (sifat transitif)

Teorema 3.16

Apabila diberika titik P dan $\overrightarrow{AB}$ maka ada titik Q yang tunggal sehingga $\overrightarrow{PQ} \cong \overrightarrow{AB}$.

C. Kelipatan ruas garis berarah

Perkalian sebuah bilangan real dengan sebuah ruas garis berarah perhatikan definisi 3.7 berikut.

Andaikan diberikan $\overrightarrow{AB}$ dan k suatu bilangan real. Apabila $k > 0$ maka $k \overrightarrow{AB}$ adalah $\overrightarrow{AP}$ sehingga $P \in \overrightarrow{AB}$ dan $AP = k(AB)$. Apabila $k < 0$ maka $k \overrightarrow{AB}$ adalah $\overrightarrow{AP}$ dengan P anggota sinar yang berlawanan

dengan $\overrightarrow{AB}$ sedangkan $\overrightarrow{AP} = |k|\overrightarrow{AB}$. Selanjutnya $\overrightarrow{AP}$ disebut kelipatan dari $\overrightarrow{AB}$.

Contoh 3.5

Apabila diberikan titik A dan B seperti dibawah ini.



Gambar 3.6

Lukis :

- a) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
- b) $-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

Penyelesaian

a) Karena $k = \frac{1}{2} > 0$ maka $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ adalah $\overrightarrow{AP}$ sehingga $P \in \overrightarrow{AB}$ dengan $AP = \frac{1}{2}(AB)$.

b) Karena $k = -\frac{3}{4} < 0$ maka $-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ adalah $\overrightarrow{AQ}$ sehingga Q anggota sinar yang berlawanan dengan $\overrightarrow{AB}$, dengan $AQ = \left|-\frac{3}{4}\right|AB = \frac{3}{4}AB$.



Gambar 3.7

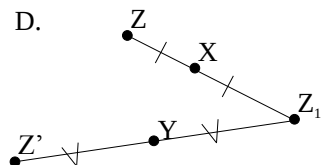
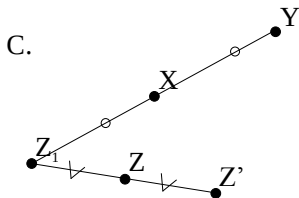
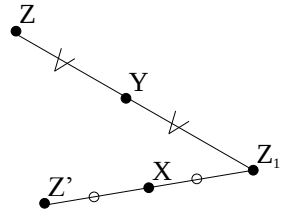
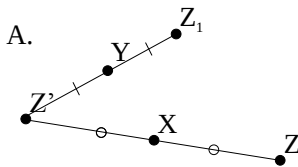
Rangkuman

1. Ruas garis berarah berbeda dengan ruas garis, ruas garis berarah salah satu ujungnya disebut titik pangkal dan lainnya titik akhir. $\overrightarrow{AB}$ ruas garis berarah dengan pangkal titik A dan akhir titik B.
2. Relasi " $\cong$ " merupakan relasi ekuivalen pada himpunan semua ruas garis berarah.
3. Titik- titik A,B,C dan D memenuhi $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD}$ jika dan hanya jika ABCD jajaran genjang.
4. Jika diberikan titik P dan $\overrightarrow{AB}$, maka ada titik Q yang tunggal sehingga $\overrightarrow{PQ} \cong \overrightarrow{AB}$.
5. Ada dua hal yang perlu diingat:
 - a. Ke $\overrightarrow{AB}$ adalah $\overrightarrow{AP}$ sehingga $P \in \overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{AP} = |k|\overrightarrow{AB}$ untuk $k > 0$.
 - b. Ke $\overrightarrow{AB}$ adalah $\overrightarrow{AP}$ sehingga P anggota sinar yang berlawanan dengan $\overrightarrow{AB}$ sedangkan $\overrightarrow{AP} = |k|\overrightarrow{AB}$ untuk $k < 0$.

Tes Formatif Modul 3

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

- 1) Apabila $A(-1,4)$ dan $g = \{(x,y) | y = 2x - 1\}$, maka persamaan $\sigma_A(g)$ adalah...
 - A. $\{(x,y) | 2x - y + 13 = 0\}$
 - B. $\{(x,y) | 2x - y + 5 = 0\}$
 - C. $\{(x,y) | 2x + y - 5 = 0\}$
 - D. $\{(x,y) | 2x + y - 11 = 0\}$
- 2) Apabila diberikan titik F , garis g dan $F \in g$, maka $\sigma_F \circ \mu_g$ adalah...
 - A. Tak mempunyai titik invarian
 - B. Mempunyai satu titik invarian
 - C. Mempunyai dua titik invarian
 - D. Mempunyai lebih dari dua titik invarian
- 3) Jika $\triangle ABC$ siku-siku di B maka $\sigma_A \circ \sigma_B \circ \sigma_C$ mempunyai titik invarian
 - A. 0
 - B. 1
 - C. Banyak tapi terhingga
 - D. Tak terhingga
- 4) Manakah diantara lukisan berikut yang menyatakan $(\sigma_Y \circ \sigma_X)(Z) = Z'$?



- 5) Apabila $A(4,1)$ dan $g = \{(x,y) | y - x + 1 = 0\}$, maka persamaan g' sehingga $\sigma_A(g') = g$ adalah...
- $\{(x,y) | x - y - 5 = 0\}$
 - $\{(x,y) | x + y + 5 = 0\}$
 - $\{(x,y) | y - x + 5 = 0\}$
 - $\{(x,y) | x + y - 5 = 0\}$
- 6) Diberikan $A(0,0)$, $B(5,4)$, dan $C(-2,4)$. Koordinat titik D sehingga $\overrightarrow{CD} \cong \overrightarrow{BA}$ adalah...
- $(-1,-6)$
 - $(-3,0)$
 - $(-7,0)$
 - $(-2,-7)$
- 7) Apabila $A(-h,-k)$, $B(5,-2\sqrt{3})$, $C(k, 8\sqrt{3})$, dan $D(-9,h)$. Nilai h dan k sehingga segiempat ABCD membentuk jajaran genjang adalah...
- $h = -2 - 5\sqrt{3}, k = 2 - 5\sqrt{3}$
 - $h = 2 + 5\sqrt{3}, k = -2 + 5\sqrt{3}$
 - $h = 2 - 5\sqrt{3}, k = -2 - 5\sqrt{3}$
 - $h = -2 + 5\sqrt{3}, k = 2 + 5\sqrt{3}$
- 8) Diberikan $A(1,1)$, $B(1,-2)$, dan $C(0,3)$. Koordinat D sehingga $\overrightarrow{AD} \cong 2\overrightarrow{BC}$ adalah....
- $(-1,11)$
 - $(1,7)$
 - $(-1,7)$
 - $(1,11)$
- 9) Apabila $A(6,2)$, $B(1,-k)$, $C(k,h)$, dan $D(-h,1)$ maka nilai h dan k sehingga $\overrightarrow{AC} \cong \overrightarrow{BD}$ adalah...
- $h = -4, k = 1$
 - $h = -1, k = 4$
 - $h = 4, k = 1$
 - $h = 1, k = -4$

10) Diberikan A (0,1), B (2,0), C(3, -3). Koordinat titik D sehingga

$$\overrightarrow{AC} \cong -\frac{1}{3}\overrightarrow{DB} \text{ adalah } \dots$$

- A. (-12,11)
- B. (11,-12)
- C. (-11,12)
- D. (12,-11)

Modul 4

Translasi

Kegiatan Belajar 1 : Translasi

A. Pengertian Translasi

Sebelum masuk ke materi translasi sebelumnya akan dibahas tentang hubungan antara dua ruas garis berarah, yang masing-masing titik ujungnya merupakan peta dari komposisi dua pencerminan pada garis yang sejajar.

Teorema 4.1

Misalkan diberikan dua buah garis g dan h yang (.....) dan dua titik A dan B , maka $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{BB''}$ dengan $\overrightarrow{A''} = (\mu_h \circ \mu_g)(A)$ dan $\overrightarrow{B''} = (\mu_h \circ \mu_g)(B)$.

Berdasarkan teorema 4.1 ini, bahwa apabila $g \parallel h$ maka setiap ruas garis berarah dengan pangkal sebuah titik dan berakhir titik petanya oleh $(\mu_h \circ \mu_g)$ adalah ekuivalen dengan setiap ruas garis berarah. Dengan kata lain, hasil transformasi $(\mu_h \circ \mu_g)$ adalah seakan-akan menggeser setiap titik sejauh jarak yang tetap dan arah yang sama. Transformasi seperti ini dinamakan suatu (.....) (geseran).

Definisi 4.1

Suatu relasi γ dinamakan suatu (.....) apabila ada ruas garis berarah $\overrightarrow{AB}$ sehingga setiap titik P pada bidang V , $\gamma_{AB}(P) = P'$ dan $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{AB}$. Translasi seperti ini ditulis dengan notasi γ_{AB} .

Contoh 4.1

Diberikan tiga titik A, B, dan P yang tak kolinear.

Lukis :

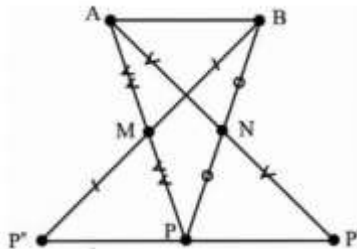
- a) Titik P' sehingga $\gamma_{AB}(P) = P'$
- b) Titik P'' sehingga $\gamma_{AB}(P'') = P$

Penyelesaian

- a) Karena $\gamma_{AB}(P) = P'$ maka $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{AB}$ atau $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PP'}$.

Dengan pengetahuan ruas garis berarah, maka dapat melukis titik P' yang memenuhi syarat.

- b) Karena $P = \gamma_{AB}(P'')$ maka $\overrightarrow{P'P} = \overrightarrow{AB}$ atau $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{P'P}$, juga dapat dilukis dengan menggunakan konsep ruas garis berarah, maka dapat melukis titik P'' yang memenuhi syarat.



Gambar 4.1

B. Translasi sebagai suatu isometri

Teorema 4.2

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ jika dan hanya jika $\gamma_{AB} = \gamma_{CD}$

Teorema 4.3

Apabila $g \parallel h$, $\overrightarrow{CD} \perp g$, $C \in g$, $D \in h$ dan $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$ maka

$$\gamma_{AB} = \mu_h \circ \mu_g$$

Teorema Akibat

1. Setiap translasi C dapat ditulis sebagai komposisi dua refleksi pada dua garis yang tegak lurus pada $\overrightarrow{AB}$ dan berjarak $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
2. Jika $\overrightarrow{AB}$ sebuah garis dan M titik tengah $\overrightarrow{AB}$ sedangkan g, h dan n masing-masing tiga garis tegak lurus di titik A, M, dan B pada $\overrightarrow{AB}$ maka $\gamma_{AB} = \mu_h \circ \mu_g = \mu_n \circ \mu_h$.
3. Translasi merupakan suatu isometri.

Teorema 4.4

Jika γ_{AB} sebuah translasi, maka $(\gamma_{AB})^{-1} = \gamma_{AB}$

C. Persamaan Translasi

Dalam hal ini akan mempelajari dua macam translasi, yaitu translasi dengan ruas garis berarah titik awal di pusat sumbu dan translasi dengan ruas garis berarah titik awal suatu titik sebarang.

Teorema 4.5

Apabila γ_{OA} dengan $O(0,0)$, $A(a,b)$ dan T suatu transformasi yang ditetapkan untuk semua titik $P(x,y) \in V$ dengan rumus: $T(P) = (x+a, y+b)$ maka $T = \gamma_{OA}$.

Teorema 4.6

Jika $A(a,b)$, $B(c,d)$ dan $P(x,y)$ maka
 $\gamma_{AB}(P) = ((c-a) + x, (d-b) + y)$.

Contoh 4.2

Diberikan titik-titik $A(1,2)$, $B(3,-1)$, $C(-2,-3)$ dan kurva
 $K = \{(x,y) | y^2 = 2x - 4\}$. Tentukan :

- a) Titik C' sehingga $\gamma_{AB}(C) = C'$
- b) Titik C'' sehingga $\gamma_{AB}(C'') = C$
- c) K' sehingga $K' = \gamma_{AB}(K)$
- d) K'' sehingga $K = \gamma_{AB}(K'')$

Penyelesaian

$a = 1$, $b = 3$, $c = 3$ dan $d = 2$, berdasarkan teorema 4.6 diperoleh:

$$\gamma_{AB}(P) = ((3-1) + x, (2-3) + y), \forall P(x,y)$$

$$\gamma_{AB}(P) = (2 + x, -1 + y), \forall P(x,y)$$

Selanjutnya untuk:

$a = 1$, $b = 3$, $c = 3$ dan $d = 2$, berdasarkan teorema 4.6 diperoleh:

$$\gamma_{AB}(P) = ((1-3) + x, (2+1) + y), \forall P(x,y)$$

$$\gamma_{AB}(P) = (-2 + x, 3 + y), \forall P(x,y)$$

$$a) \quad C' = \gamma_{AB}(C) = \gamma_{AB}(-2,-3) = (2-2, -3-3) = (0,-6)$$

$$b) \quad \text{Karena } \gamma_{AB}(C'') = C \text{ maka } \gamma_{AB} \circ \gamma_{AB}(C'') = \gamma_{BA}C$$

$$\Rightarrow (\gamma_{BA} \circ \gamma_{AB}(C'')) = \gamma_{BA}(C) \Rightarrow \varepsilon(C'') = \gamma_{BA}(C)$$

$$\Rightarrow C'' = \gamma_{BA}(C) = \gamma_{BA}(-2,-3) = (-2-2, 3-3) = (-4,0)$$

$$c) \quad \text{Misalkan } P(x_0, y_0) \in K \text{ maka } y_0^2 = 2x_0 - 4 \quad (1)$$

Misalkan $(x,y) = \gamma_{AB}(x_0, y_0) = (2 + x_0, -3 + y_0)$

Maka didapat

$$x_0 = x - 2 \text{ dan } y_0 = y + 3 \quad (2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh:

$$(y + 3)^2 = 2(x - 2) - 4$$

$$y^2 + 6y + 9 = 2x - 4 - 4$$

$$y^2 + 6y - 2x + 17 = 0$$

jadi, $K' = \gamma_{AB}(K) = \{(x, y) \mid y^2 + 6y - 2x + 17 = 0\}$

- d) Karena $K = \gamma_{AB}(K'')$ maka $K'' = \gamma_{BA}(K)$. Misalkan $Q(x_1, y_1) \in K$ maka

$$y_1^2 = 2x_1 - 4, \quad (3)$$

Misalkan $(x,y) = \gamma_{BA}(x_1, y_1) = (-2 + x_1, 3 + y_1)$, didapat

$$x_1 = x + 2 \text{ dan } y_1 = y - 3 \quad (4)$$

Dari 3 dan 4 didapat,

$$(y - 3)^2 = 2(x + 2) - 4$$

$$y^2 - 6y + 9 = 2x + 4 - 4$$

$$y^2 - 6y - 2x + 9 = 0$$

jadi, $K'' = \{(x, y) \mid y^2 - 6y - 2x + 9 = 0\}$

Rangkuman

1. Translasi adalah suatu transformasi yang memindahkan semua titik pada bidang Euclides V dengan jarak yang sama dan arah yang sama.
2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ jika dan hanya jika $\gamma_{AB} = \gamma_{CD}$.
3. Translasi dapat ditulis sebagai komposisi dari dua pencerminan yang kedua sumbunya sejajar dan berjarak setengah dari panjang translasi.
4. Translasi merupakan isometri langsung.
5. Jika γ_{AB} sebuah translasi maka $(\gamma_{AB})^{-1} = \gamma_{BA}$.
6. Jika $A(a,b)$, $B(c,d)$ dan $P(x,y)$ maka $\gamma_{AB}(P) = ((c-a) + x, (d-b) + y)$.

Kegiatan belajar 2 : Ketertutupan translasi

A. Komposisi translasi

Sebelum mempelajari hasil komposisi dari dua translasi atau lebih, maka perlu mempelajari satu teori yaitu pada teorema 4.7 berikut ini

Teorema 4.7

Jika γ_{AB} suatu translasi dan C, D titik-titik sehingga $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$, maka $\gamma_{AB} = \sigma_D \circ \sigma_C$.

Teorema 4.8

Komposisi translasi adalah (.....) (disebut juga teorema ketertutupan translasi)

B. Sifat-Sifat Lain Translasi

Teorema 4.9

Komposisi suatu (.....) dengan putaran merupakan suatu setengah putaran.

Teorema akibat

Jika $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$ masing-masing setengah putaran maka $\sigma_C \circ \sigma_B \circ \sigma_A = \sigma_D$ dengan titik D sehingga $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Teorema 4.10

Jika γ_{AB} dan γ_{BC} masing-masing suatu translasi, maka $\gamma_{AB} \circ \gamma_{BC} = \gamma_{AC}$

Contoh 4.3

Misalkan γ_{AB} suatu translasi yang membawa A(2,3) ke B(4,1) dan γ_{CD} suatu translasi yang membawa C(-3,4) ke

$D(0,3)$. Jika $P(x,y)$, tentukan $(\gamma_{CD} \circ \gamma_{AB})(P)$ dan $(\gamma_{AB} \circ \gamma_{CD})(P)$.

Penyelesaian

Berdasarkan teorema 4.6, didapat

$$\gamma_{AB}(P) = (2+x, -2+y), \forall P(x, y) \in V$$

$$\gamma_{CD}(P) = (3+x, -1+y), \forall P(x, y) \in V$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} (\gamma_{CD} \circ \gamma_{AB})(P) &= \gamma_{CD}[\gamma_{AB}(P)] = \gamma_{CD}(2+x, -2+y) \\ &= (3+(2+x), -1+(-2+y)) \\ &= (5+x, -3+y) \end{aligned}$$

Sementara itu,

$$\begin{aligned} (\gamma_{AB} \circ \gamma_{CD})(P) &= \gamma_{AB}[\gamma_{CD}(P)] = \gamma_{AB}(3+x, -1+y) \\ &= (2+(3+x), -2+(-1+y)) \\ &= (5+x, -3+y) \end{aligned}$$

Khusus untuk translasi ini, ternyata $(\gamma_{AB} \circ \gamma_{CD}) = (\gamma_{CD} \circ \gamma_{AB})$

Berdasarkan contoh 4.3 diatas maka komposisi translasi berlaku sifat komutatif.

Rangkuman

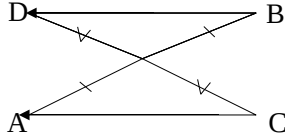
1. Suatu translasi γ_{AB} dengan C dan C titik-titik sehingga $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$ adalah $\gamma_{AB} = \sigma_D \circ \sigma_C$
2. Himpunan yang terdiri dari semua translasi, terhadap operasi komposisi membentuk grup. Grup yang terbentuk merupakan grup abel.
3. Komposisi translasi dengan setengah putaran adalah suatu setengah putaran.
4. Translasi dapat dinyatakan sebagai komposisi dua setengah putaran.
5. Jika γ_{AB} dan γ_{BC} masing-masing suatu translasi maka $(\gamma_{AB} \circ \gamma_{BC}) = \gamma_{AC}$.

Tes Formatif Modul 4

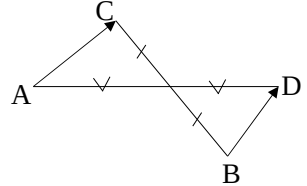
Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Apabila diberikan titik A, B, dan C. Lukisan dalam rangka mendapatkan titik D sehingga $\gamma_{CA}(D) = B$ adalah...

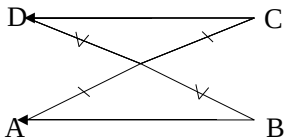
A.



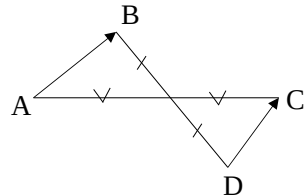
B.



C.



D.



2) Jika A(0,0), B(2,1), dan C(-2,1), Persamaan garis t sehingga $C \in t$ dan $\mu_s \circ \mu_g = \gamma_{AB}$ adalah...

A. $[(x, y)(2y + 4x + 11 = 0]$

B. $[(x, y)(2y + 4x - 13 = 0]$

C. $[(x, y)(2y - x - 4 = 0]$

D. $[(x, y)(2y - x + 2 = 0]$

3) Jika A(3,4) dan B(-1,2) maka koordinat titik D sehingga $\gamma_{AB}(D) = (-2,2)$ adalah...

A. (-4,-3)

B. (0,-1)

C. (6,0)

D. (4,1)

Untuk soal nomor 4 dan 5 pilih

- A. Jika 1 dan 2 benar
- B. Jika 1 dan 3 benar
- C. Jika 2 dan 3 benar
- D. Jika 1, 2, dan 3 benar

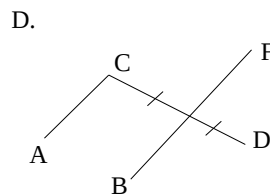
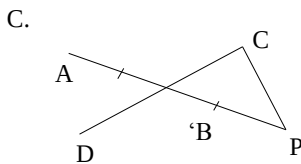
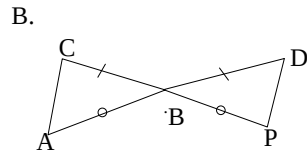
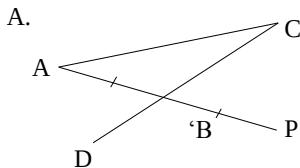
4) Pernyataan dibawah ini, yang benar adalah...

1. Setiap translasi adalah suatu kolineasi.
2. Setiap translasi adalah suatu dilatasi.
3. Setiap translasi adalah suatu isometri.

5) Diantara pernyataan dibawah ini, yang benar adalah...

1. Komposisi translasi bersifat asosiatif.
2. Komposisi translasi bersifat komutatif.
3. Komposisi translasi bukan suatu dilatasi.

6) Jika diberikan $\gamma_{AB} \circ \gamma_{BC}$ dan titik P. Lukisan dalam rangka menentukan titik D sehingga $\gamma_{BC} \circ \gamma_{AB}(P) = D$ adalah....



7) Jika γ suatu translasi yang ditetapkan sebagai berikut

$$\gamma(P) = (x-2, y+4), \forall P(x, y) \in V$$

Koordinat titik D sehingga $\sigma_C \circ \sigma_D = \gamma$. Jika C(1,-1) adalah...

- A. (2,-3)
- B. (-2,3)
- C. (-2,-3)
- D. (2,3)

8) Jika $\gamma_{BC} = \gamma_{OA}$, maka pernyataan yang benar adalah...

- A. $\sigma_B \circ \sigma_C \circ \sigma_D = \sigma_A$
- B. $\sigma_C \circ \sigma_A \circ \sigma_C = \sigma_D$
- C. $\sigma_D \circ \sigma_A \circ \sigma_C = \sigma_B$
- D. $\sigma_D \circ \sigma_A \circ \sigma_B = \sigma_C$

9) Bentuk paling sederhana dari komposisi translasi:

$$\sigma_{BC} \circ \sigma_{AB} \circ \sigma_{DC} \circ \sigma_{FE} = \sigma_{CD} \text{ adalah...}$$

- A. σ_{AE}
- B. σ_{AF}
- C. σ_{BC}
- D. σ_{BF}

10) Jika $Q = \gamma_{AB}(P)$ maka bentuk paling sederhana dari $\gamma_{AB} \circ \sigma_P \circ \gamma_{AB}^{-1}$ adalah ...

- A. γ_{AP}
- B. σ_P
- C. γ_{BQ}
- D. σ_Q

MODUL 5

Rotasi

Kegiatan Belajar 1: Rotasi

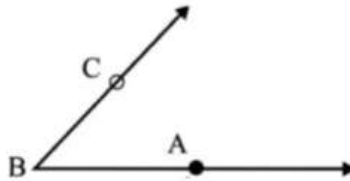
A. Pengertian Rotasi

Definisi 5.1

Sebuah sudut berarah adalah (.....) yang salah satu kakinya ditetapkan sebagai kaki awal dan kaki lainnya sebagai kaki akhir.

Contoh 5.1:

Diberikan $\angle ABC$ seperti pada gambar 5.1 apabila kaki awalnya anda tetapkan sinar $\overrightarrow{BA}$ dan kaki akhirnya sinar $\overrightarrow{BC}$ maka anda akan mendapatkan sudut berarah ABC, yang dinotasikan $\angle ABC$. Sementara itu, apabila anda menetapkan kaki awalnya sinar $\overrightarrow{BC}$ dan kaki akhirnya sinar $\overrightarrow{BA}$, maka anda mendapatkan sudut berarah CAB,



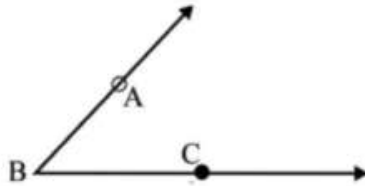
Gambar 5.1

yang dinotasikan $\angle CBA$. Jelaskan bahwa $\angle ABC \neq \angle CBA$.

Contoh 5.2:

Misalkan diberikan $\angle ABC = 45^\circ$ dengan kondisi, seperti

pada gambar 5.2.



Gambar 5.2

Tentukan:

- a) $m(\angle ABC)$
- b) $m(\angle CBA)$

Penyelesaian:

- a) Karena orientasi ganda (A,B,C) negatif, maka $(\angle ABC) = -45^\circ$
- b) Karena orientasi ganda (B,A,C) negatif, maka $(\angle CBA) = 45^\circ$

Berdasarkan contoh 5.2. maka dapat diturunkan teorema berikut:

Teorema 5.1:

Misalkan diberikan $\angle ABC$, maka $m(\angle ABC) = m(\angle CBA)$

Bukti:

Karena orientasi ganda (B, A, C) ini bisa positif atau negatif, maka anda tinjau apabila:

- 1) Orientasi ganda (B, A, C) positif, akibatnya $m(\angle ABC) = m(\angle ABC)$. Jika orientasi ganda (B, A, C) positif, maka orientasi ganda (B, C, A) negatif, akibatnya $m(\angle CBA) = m(\angle ABC)$. Jadi, $m(\angle ABC) = m(\angle CBA)$

- 2) Orientasi ganda (B, A, C) negatif, akibatnya $m(\angle ABC) = m(\angle ABC)$. Jika orientasi ganda (B, A, C) negatif, maka orientasi ganda (B, C, A) positif, akibatnya $m(\angle CBA) = m(\angle ABC)$. Jadi, $m(\angle ABC) = m(\angle CBA)$

Definisi 5.2:

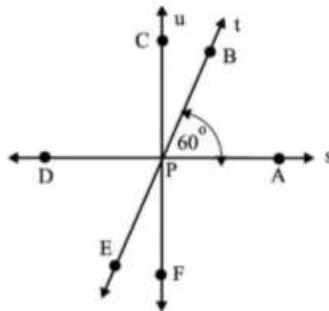
Misalkan diberikan sudut ABC, $m(\angle ABC)$ ditetapkan sebagai besar ukuran (.....) ABC, $(\angle ABC)$ dan $m(\angle CBA)$ ditetapkan sebagai besar ukuran sudut berarah CBA $(\angle CBA)$.

$$m(\angle ABC) = \begin{cases} m(\angle ABC) & \text{jika orientasi ganda (B, A, C) positif} \\ -m(\angle ABC) & \text{jika orientasi ganda (A, A, C) negatif} \end{cases}$$

Definisi 5.3:

Misalkan diberikan dua garis berpotongan l dan m tidak (.....). Sudut antar l dan m ditetapkan sebagai (.....) yang dibentuk kedua garis tersebut.

Contoh 5.3:



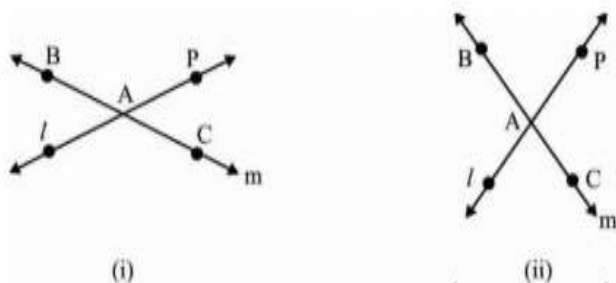
Gambar 5.3

Perhatikan Gambar 5.3. Besar sudut antara s dan t adalah 60° . Sedangkan besar sudut antara t dan u adalah 30° .

Definisi 5.4:

Misalkan diberikan (.....) l dan m berpotongan tidak tegak lurus di titik A dan P titik pada l , sedangkan B dan C (.....) pada m sehingga A terletak antara B dan C (perhatikan Gambar 5.4). Apabila $\angle PAB$ lancip, ditetapkan dari l ke m adalah $\angle PAB$, apabila $\angle PAB$ tumpul, ditetapkan sudut dari l ke m adalah $\angle PAC$.

Perhatikan s , t , dan u pada Gambar 5.3. Ukuran sudut s ke t adalah $m(\angle PAB) = 60^\circ$ karena orientasi ganda (P, A, B) positif. Sedangkan ukuran sudut dari u ke t adalah $m(\angle CPB) = 30^\circ$, sebab orientasi ganda (P, C, B) negatif.



Gambar 5.4

Teorema 5.2:

Misalkan diberikan (.....) s dan t yang berpotongan di titik A tidak tegak lurus. Andaikan P dan Q dua titik yang berbeda dari A , maka $m(\angle PAP'') = m(\angle QAQ'')$ dimana $P'' = (\mu_t \circ \mu_s)(P)$ dan $Q'' = (\mu_t \circ \mu_s)(Q)$.

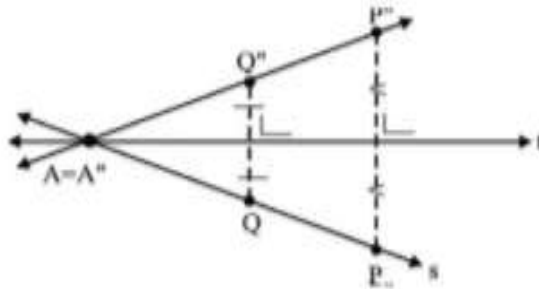
Bukti:

Ada 4 kasus, yaitu: 1) $P, Q \in s$, 2) $P \in s, Q \notin s$, 3) $P \notin s, Q \in s$ atau $P \notin s, Q \notin s$. Untuk kasus $P \in s, Q \notin s$ atau $P \notin s, Q \in s$, pembuktian serupa maka dianggap kasus serupa. Sehingga hanya ada tiga kasus, yaitu:

- 1) $P, Q \in s$
- 2) Salah satu dari P atau $Q \in s$, dan
- 3) $P \notin s, Q \notin s$

Untuk kasus $P, Q \in s$.

$(\mu_t \circ \mu_s)(A) = \mu_t[\mu_s(A)] = \mu_t(A) = A$ Namakan peta ini A'' Jadi, $A'' = A$. Karena masing-masing isometri dan A, Q dan P kolinear maka $A = A''$ juga



Gambar 5.5

kolinear. Akibatnya $m(\angle PAP'') = m(\angle QAQ'')$ (lihat Gambar 5.5)

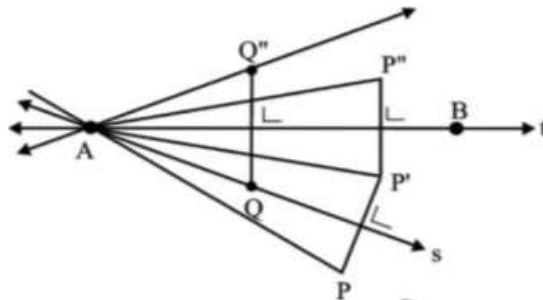
Untuk kasus $P \notin s, Q \in s$. Misalkan $P' = \mu_s(P)$, maka $m(\angle PAQ) = m(\angle QAP')$. Misal $P'' = \mu_t(P')$ dan $B \in t$, maka $m(\angle P'AB) = m(\angle BAP'')$.

Misalkan $(\mu_t \circ \mu_s)(Q) = \mu_t[\mu_s(Q)] = \mu_t(Q) = Q''$,
 maka $m(\angle QAB) = m(\angle BAQ'')$,

$$\begin{aligned} m(\angle Q''AP'') &= m(\angle Q''AB) - m(\angle P''AB) \\ &= m(\angle BAQ) - m(\angle BAP') \\ &= m(\angle P'AQ) \\ &= m(\angle QAP) \end{aligned}$$

Jadi, $m(\angle PAQ) = m(\angle P''AQ'')$

Maka dari itu, $m(\angle PAP') = m(\angle QAQ'')$. Perhatikan keadaan Gambar 5.6.



Gambar 5.6

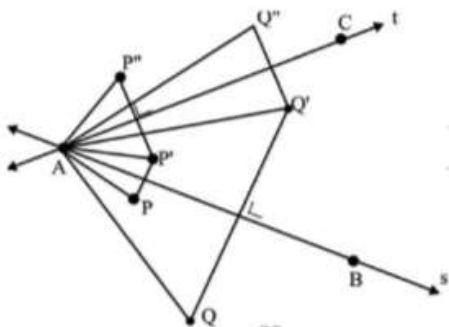
Untuk kasus $P \notin s, Q \notin s$. Misalkan

$$P' = \mu_s(P), Q' = \mu_s(Q), P'' = \mu_t(P') \text{ dan } Q'' = \mu_t(Q')$$

. Maka $m(\angle PAQ) = m(\angle BAQ) - m(\angle BAP)$ dengan $B \notin s$.

$$\begin{aligned} m(\angle PAQ) &= m(\angle Q'AB) - m(\angle P'AB) \\ &= m(\angle Q'AP') \\ &= m(\angle CAP') - m(\angle CAQ'), C \in t \\ &= m(\angle P''AC) - m(\angle Q''AC) \\ &= m(\angle P''AQ'') \end{aligned}$$

Jadi, $m(\angle PAP'') = m(\angle QAQ'')$. Perhatikan Gambar 5.7.



Gambar 5.7

Jadi dapat disimpulkan bahwa:

$$m(\angle PAP'') = m(\angle QAQ''), \text{ jika } P'' = (\mu_t \circ \mu_s)(P) \text{ dan } Q'' = (\mu_t \circ \mu_s)(Q)$$

Berdasarkan pengetahuan diatas, Anda pelajari pengertian rotasi yang diberikan pada definisi berikut:

Definisi 5.5:

Andaikan A sebuah (.....) pada bidang Euclid V dan φ sebuah bilangan real yang memenuhi $-180^\circ < \varphi < 180^\circ$. sebuah rotasi mengelilingi A adalah sebuah (.....) $\rho_{A,\varphi}$ yang ditetapkan sebagai berikut. Untuk $P \in V$.

- a) $\rho_{A,\varphi}(P) = A$, jika $P = A$
- b) $\rho_{A,\varphi}(P) = P'$ sehingga $m(\angle PAP') = \varphi$ dan $AP' = AP$, jika $P \neq A$

Contoh 5.4:

Diberikan titik A, Q dan P. Lukis:

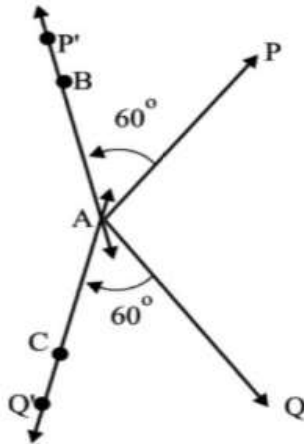
a) $\rho_{A,60^\circ}(P)$

b) $\rho_{A,-60^\circ}(Q)(P)=P'$

Penyelesaian:

a) 1) buat $\overline{AP}$, 2) buat $\angle PAB = 60^\circ$, 3) buat $P' \in \overline{AB}$ sehingga $AP' = AP$. Jadi $\rho_{A,60^\circ}(P) = P'$

1) buat $\overline{AQ}$, 2) buat $\angle QAC = -60^\circ$, 3) buat $Q' \in \overline{AC}$ sehingga $AQ' = AQ$. Jadi, $\rho_{A,-60^\circ}(Q) = Q'$.



Gambar 5.8

B. Rotasi Sebagian Suatu Transformasi

Teorema 5.3:

Misalkan relasi yang ditetapkan sebagai berikut.

Untuk setiap $P \in V$, berlaku:

- a) $\rho_{A,\varphi}(P) = A$, jika $P = A$.
- b) $\rho_{A,\varphi}(P) = P'$, sehingga $m(\angle PAP') = \varphi$ dan $AP' = AP$, jika $P \neq A$, maka relasi $\rho_{A,\varphi}$ merupakan suatu (.....).

Bukti:

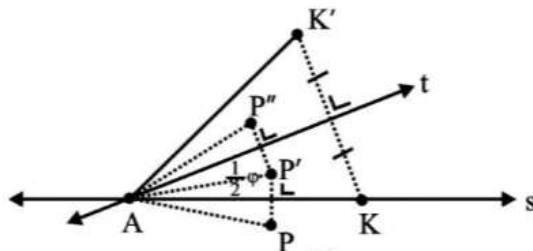
- 1) Ditunjukkan bahwa $\rho_{A,\varphi}$ fungsi dari V ke V .

Ambil P sembarang titik pada V . Berdasarkan a) P mempunyai peta yang tunggal, yaitu $\rho_{A,\varphi}$, jika $\rho_{A,\varphi}$. Berdasarkan a) P mempunyai peta yang tunggal, yaitu $\rho_{A,\varphi}$, jika $\rho_{A,\varphi}$. Jadi, fungsi dari V ke V .

- 2) Akan ditunjukkan bahwa $\rho_{A,\varphi}$ adalah injektif.

Pandang dua titik $P, Q \in V$ dengan $\rho_{A,\varphi}(P) = \rho_{A,\varphi}(Q) = P'$. Maka $m(\angle PAP') = m(\angle QAP') = \varphi$ dan $AP' = AP = AQ$. Akibatnya lebih lanjut jelas $P = Q$ Jadi, $\rho_{A,\varphi}$ adalah injektif.

3) Akan dibuktikan bahwa surjektif.



Gambar 5.9

Ambil sebarang titik $Q \in V$, maka $Q = A$ atau $Q \neq A$. Bila $Q = A$, maka ada $A \in V$ sehingga $\rho_{A,\varphi}(A) = Q = A$. Bila $Q \neq A$, maka ada sinar $\overrightarrow{AQ}$. Berdasarkan postulat konstruksi sudut ada sinar $\overrightarrow{AR}$, sehingga $m(\angle QAR) = -\varphi$. Berdasarkan postulat penggaris ada $P \in \overrightarrow{AR}$, sehingga $AP = AQ$. Dari uraian ini dapat disimpulkan $\rho_{A,\varphi}(P) = Q$. Jadi, ada $P \in V$, sehingga $\rho_{A,\varphi}(P) = Q$ untuk sebarang $Q \neq A$, artinya $\rho_{A,\varphi}$ surjektif.

Karena $\rho_{A,\varphi}: 1$. Relasi dari V ke V .

2. fungsi
3. injektif
4. surjektif

Maka $\rho_{A,\phi}$ suatu transformasi.

Teorema 5.4 :

Jika garis s dan t berpotongan di titik A dan

(.....) dari s ke t adalah $\frac{1}{2}\varphi$, maka

$$\rho_{A,\varphi} = \mu_t \circ \mu_s.$$

Teorema 5.5 :

Komposisi dua pencerminan pada garis adalah suatu

(.....) atau (.....).

Teorema 5.6 :

Setiap (.....) adalah isometri langsung.

Teorema 5.7 ;

$$\rho_{O,\varphi}(P) = (x \cos \varphi - y \sin \varphi, x \sin \varphi + y \cos \varphi) \text{ atau}$$

$$\rho_{O,\varphi}(P) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{untuk}$$

$$P(x, y) \in V \text{ dan } O(0,0)$$

$$x = OP \cos a \text{ dan } y = OP \sin a$$

Sedangkan,

$$x' = OP \cos(a + \varphi) = OP(\cos a \cdot \cos \varphi - \sin a \cdot \sin \varphi)$$

$$x' = (OP \cos a) \cdot \cos \varphi - (OP \sin a) \sin \varphi$$

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi$$

$$y' = OP \sin(a + \varphi) = OP(\sin a \cdot \cos \varphi + \cos a \cdot \sin \varphi)$$

$$y' = (OP \sin a) \cdot \cos \varphi + (OP \cos a) \sin \varphi$$

$$y' = y \cos \varphi + x \sin \varphi$$

Atau kalau ditulis secara matriks, didapat:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi - \sin \varphi \\ \sin \varphi + \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Contoh 5.5:

Diberikan $\rho_{O,60^\circ}$ dan titik $P(1,2)$. Tentukan koordinasi

$$P' = \rho_{O,60^\circ}(P)$$

Penyelesaian:

$$\varphi = 60^\circ, \quad \text{maka} \quad \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} P' = \rho_{O,60^\circ}(1,2) &= \left(1 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}, 1 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}, 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

Secara matriks:

$$P' = \rho_{O,60^\circ}(1,2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3} + 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 5.8:

Untuk setiap $P(x, y)$ dan $A(a, b) \in V$, maka:

$$P' = \rho_{O,\varphi}(P) = ((x-a)\cos\varphi - (y-b)\sin\varphi + a, (x-a)\sin\varphi + (y-b)\cos\varphi + b)$$

Atau,

$$\rho_{O,\varphi}(P) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi - \sin \varphi \\ \sin \varphi + \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Bukti:

Perhatikan Gambar 5.11. Sistem koordinasi diubah menjadi $\bar{x}\bar{y}$ dengan aturan: $x = \bar{x} + a$ dan $y = \bar{y} + b$, sehingga:

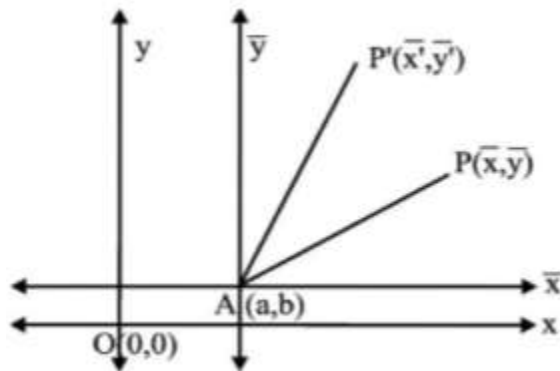
$$P(\bar{x}, \bar{y}) = (x - a, y - b) \text{ dan } P'(\bar{x}, \bar{y}) = (x' - a, y' - b)$$

Gunakan Teorema 5.7 pada sistem $\bar{x}\bar{y}$ didapat:

$$\begin{pmatrix} x' - a \\ y' - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi - \sin \varphi \\ \sin \varphi + \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

Gunakan sistem $x \circ y$, maka didapat:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi - \sin \varphi \\ \sin \varphi + \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$



Gambar 5.10

Contoh 5.6:

Diberikan $A(1,0)$ dan garis $s = \{(x, y) \mid y = 2x - 3\}$.

Tentukan persamaan $s' = \rho_{O, 90^\circ}(S)$

Penyelesaian:

Misalkan $(x_0, y_0) \in s$, maka $y_0 = 2x - 3$ (1)

$$\begin{aligned}\rho_{O,90^\circ}(x_0, y_0) &= \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 - 1 \\ y_0 - 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 - 1 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 - y_0 \\ x_0 - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (-y_0 + 1, x_0 - 1)\end{aligned}$$

Misalkan $\rho_{O,90^\circ}(s)(x_0, y_0) = (x, y)$, maka didapat:

$$\begin{aligned}x &= y_0 + 1 \quad \text{dan} \quad y = x_0 - 1 \quad \text{atau} \quad y_0 = 1 - x \quad \text{dan} \\ x_0 &= y + 1\end{aligned} \quad (2)$$

Dari (1) dan (2) didapat: $(1 - x) = 2(y + 1) - 3$ atau $2y + x - 2 = 0$.

Jadi, persamaan

$$s' = \rho_{O,90^\circ}(s) = \{(x, y) \mid 2y + x - 2 = 0\}$$

Teorema 5.9:

Apabila diberikan $\rho_{O,\varphi}$, maka $\rho_{A,\varphi}^{-1} = \rho_{A,-\varphi}$.

Bukti:

Ambil garis s dan t pada V , sehingga $t \cap s = \{A\}$ dan

sudut dari s dan t adalah $\frac{1}{2}\varphi$, maka berdasarkan

Teorema 5.4 didapatkan bahwa $\rho_{O,\varphi} = \mu_{sO}\mu_t$ dan

sudut dari s dan t adalah $\frac{1}{2}\varphi$. Karena

$$(\rho_{O,\varphi})^{-1} = (\mu_{tO}\mu_s)^{-1} = \mu_{tO}^{-1}\mu_s^{-1} = \mu_{tO}\mu_s = \rho_{A,-\varphi} \text{ sebab}$$

$$\{A\} = t \cap s \text{ dan sudut dari } s \text{ dan } t \text{ adalah } \frac{1}{2}\varphi.$$

Latihan

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi diatas, kerjakan latihan berikut!

1) Diketahui titik A dan P yang berbeda. Lukiskan:

a) $\rho_{A,90^\circ}(P)$ c) $\rho_{A,-45^\circ}(P)$

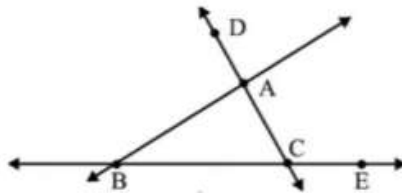
b) $\rho_{A,150^\circ}(P)$ d) Q hingga

$$\rho_{A,30^\circ}(Q) = (P)$$

2) Dalam Gambar 5.12 $m(\angle ABC) = 40^\circ$ dan $m(\angle BAD) = 120^\circ$. Tentukan:

a) $m(\angle DAB)$, $m(\angle BCA)$, $m(\angle ECA)$

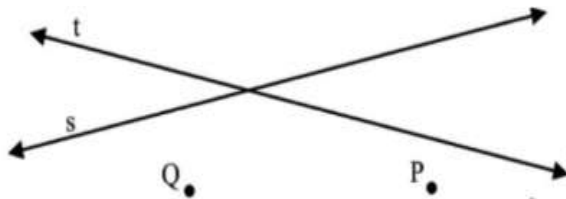
b) Besar sudut dari $\overleftrightarrow{AB}$ ke $\overleftrightarrow{BC}$, dari $\overleftrightarrow{AC}$ ke $\overleftrightarrow{BC}$, dari $\overleftrightarrow{AB}$ ke $\overleftrightarrow{AC}$.



Gambar 5.11

3) Diketahui titik A dan P yang berbeda. Lukis P' dan temukan $m(\angle DAB)$ jika P' peta dari P oleh transformasi di bawah ini.

- a) $\rho_{A,30^\circ} \circ \rho_{A,90^\circ}$ c) $\rho_{A,135^\circ} \circ \rho_{A,90^\circ}$
 b) $\rho_{A,60^\circ} \circ \rho_{A,120^\circ}$ d) $\rho_{A,-120^\circ} \circ \rho_{A,-150^\circ}$
- 4) Tulislah komposisi transformasi berikut dalam bentuk paling sederhana.
- a) $\rho_{A,30^\circ} \circ \rho_{A,60^\circ}$ d) $\rho_{A,-60^\circ} \circ \rho_{A,15^\circ}$
 b) $\rho_{A,120^\circ} \circ \rho_{A,-90^\circ}$ e) $\rho_{A,-120^\circ} \circ \rho_{A,-150^\circ}$
 c) $\rho_{A,135^\circ} \circ \rho_{A,90^\circ}$ f) $\rho_{A,180^\circ} \circ \rho_{A,60^\circ}$
- 5) Diketahui dua garis s dan t dan titik P dan Q seperti pada Gambar 5.12.
- a) Lukis $P' = (\mu_s \circ \mu_t)(P)$
 b) Lukis $P'' = (\mu_t \circ \mu_s)(P)$
 c) Lukis $Q' = (\mu_s \circ \mu_t)(Q)$
 d) Lukis $m(\angle PAP') = 68^\circ$, tentukan sudut dari s ke t.



Gambar 5.12

- 6) Diketahui sebuah titik A, lukislah dua garis s dan t sehingga $\mu_s \circ \mu_t = \rho_{A,-60^\circ}$
- 7) Jika A, B dan B' titik-titik diketahui dan jika $B' = \rho_{A,\varphi}(B)$. Lukis dua garis s dan t sehingga $\mu_s \circ \mu_t = \rho_{A,\varphi}$.



Gambar 5.13

8) Jika O titik awal dari $A(1,0)$. Tentukan:

- | | |
|---------------------------|-----------------------------|
| a) $\rho_{O,60^\circ}(A)$ | c) $\rho_{O,120^\circ}(A)$ |
| b) $\rho_{O,45^\circ}(A)$ | d) $\rho_{O,-135^\circ}(A)$ |

9) Diketahui $A(0,0)$, $s = \{(x,y) \mid x=0\}$ dan $t = \{(x,y) \mid y=x\}$.

a) Tentukan peta oleh $\mu_t \mu_s$ dari $B(1,0)$, $C(0,3)$ dan $D(2,-2)$.

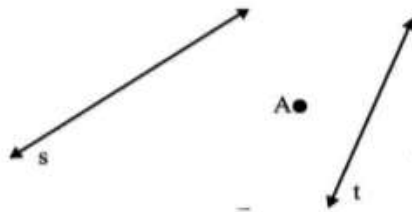
b) Jika $P(x,y)$ titik sembarang, tentukan koordinat $(\mu_s \mu_t)(P)$.

c) Nyatakan $\mu_t \mu_s$ sebagai transformasi yang sederhana.

10) Ditentukan $A(0,0)$. Tentukan rotasi yang memetakan titik $B(1,0)$ pada $B'\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ dengan pusat rotasi di A.

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| a) $\rho_{O,-90^\circ}$ | d) $\rho_{O,90^\circ}$ |
| b) $\rho_{O,180^\circ}$ | e) $\rho_{O,-60^\circ}$ |
| c) $\rho_{O,120^\circ}$ | |

- 11) Apabila $A(1,3)$ dan O titik awal, tuliskan persamaan garis s dan t sehingga $\mu_t \mu_s$ sama dengan rotasi berikut.
- 12) Jika L lingkaran dengan jari-jari 2 dengan pusat di $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ dan diketahui titik $B(0,0)$ maka tuliskan persamaan $L' = \rho_{B,45^\circ}(L)$.
- 13) Lukis $\triangle ABC$ sama sisi dengan titik sudut A diketahui dan B pada garis s , C pada garis t , t dan s diketahui. Buktikan lukisan anda memenuhi syarat, kemudian



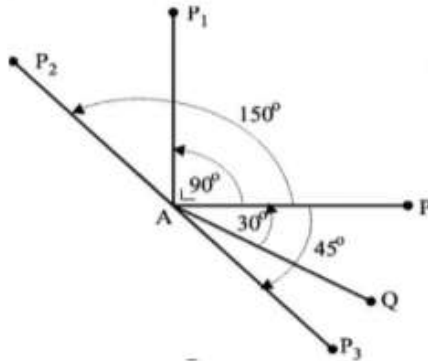
Gambar 5.14

diskusikan ada berapa kemungkinan $\triangle ABC$ yang dapat dilukis.

Petunjuk jawaban latihan:

- 1) a) Misalkan $P_1 = \rho_{A,90^\circ}(P) \Rightarrow m(\angle PAP_1) = 90^\circ$.
- b) Misalkan $P_2 = \rho_{A,150^\circ}(P) \Rightarrow m(\angle PAP_2) = 150^\circ$
- c) Misalkan $P_3 = \rho_{A,-45^\circ}(P) \Rightarrow m(\angle PAP_3) = -45^\circ$

- d) Karena $\rho_{A,-30^\circ}(P) \Rightarrow m(\angle PAP_1) = 30^\circ$ (semua lukisan pada Gambar 5.14)



Gambar 5.15

- 2) a) $m(\angle DAB) = 120^\circ$, $m(\angle BCA) = -80^\circ$,
 $m(\angle ECA) = 100^\circ$

- b) Besar sudut dari $\overrightarrow{AB}$ ke $\overrightarrow{BC} = m(\angle ABC) = -40^\circ$

Besar sudut dari $\overrightarrow{AC}$ ke $\overrightarrow{BC} = m(\angle ACB) = 80^\circ$

Besar sudut dari $\overrightarrow{AB}$ ke $\overrightarrow{BC} = m(\angle BAC) = 60^\circ$

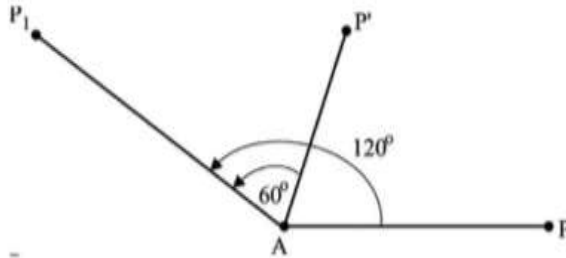
- 3) a) $m(\angle PAP') = m(\angle PAP_1) + m(\angle P_1AP') = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$
 Atau

$\varphi_1 = 90^\circ, \varphi_2 = 30^\circ, |\varphi_1 + \varphi_2| \leq 180^\circ \Rightarrow \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 120^\circ$
 dengan $\varphi = m(\angle PAP')$.

$\varphi_1 = 120^\circ, \varphi_2 = -60^\circ$ maka

$$|\varphi_1 + \varphi_2| = 60^\circ \leq 180^\circ \Rightarrow \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 60^\circ$$

dengan $\therefore m(\angle PAP') = \varphi = 60^\circ$



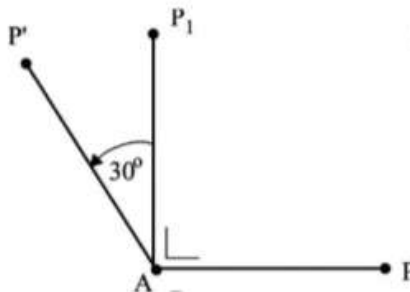
Gambar 5.16

Gambar 5.17

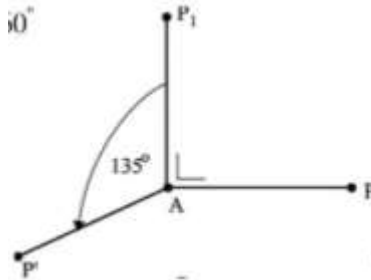
b) $\varphi_1 + \varphi_2 = 90^\circ + 135^\circ = 225^\circ > 180^\circ$ maka,

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - 360^\circ = 225^\circ - 360^\circ = -135^\circ.$$

$\therefore m(\angle PAP') = -135^\circ$



Gambar 5.18

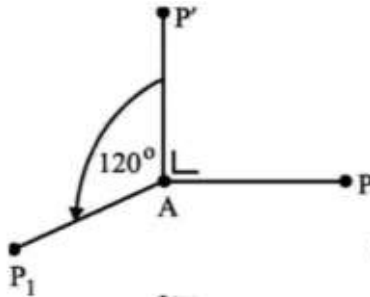


c) $\varphi_1 + \varphi_2 = -150^\circ - 120^\circ = -270^\circ < -180^\circ$ maka

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + 360^\circ$$

$$\varphi = -270^\circ + 360^\circ = 90^\circ$$

$$\therefore m(\angle PAP') = 90^\circ$$



Gambar 5.19

4) a) $\rho_{A,30^\circ} \rho_{A,60^\circ} = \rho_{A,30^\circ+60^\circ} = \rho_{A,90^\circ}$, sebab
 $|30^\circ + 60^\circ| \leq 180^\circ$

b) $\rho_{A,120^\circ} \rho_{A,-90^\circ} = \rho_{A,120^\circ-90^\circ} = \rho_{A,30^\circ}$, sebab
 $|120^\circ - 90^\circ| \leq 180^\circ$

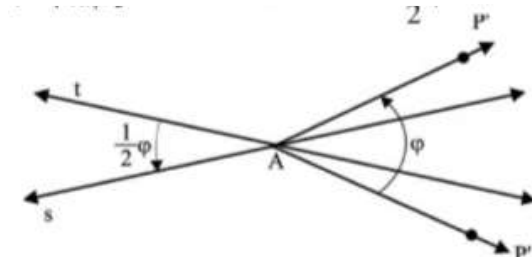
c) $\rho_{A,135^\circ} \rho_{A,90^\circ} = \rho_{A,135^\circ+90^\circ-360^\circ} = \rho_{A,-135^\circ}$, sebab
 $135^\circ + 90^\circ > 180^\circ$

d) $\rho_{A,-60^\circ} \rho_{A,15^\circ} = \rho_{A,-60^\circ-45^\circ} = \rho_{A,-105^\circ}$, sebab $|-60^\circ - 45^\circ| \leq 180^\circ$

e) $\rho_{A,-120^\circ} \rho_{A,-150^\circ} = \rho_{A,120^\circ-150^\circ+360^\circ} = \rho_{A,90^\circ}$, sebab $-120^\circ - 150^\circ < -180^\circ$

f) $\rho_{A,180^\circ} \rho_{A,60^\circ} = \rho_{A,180^\circ} \rho_{A,60^\circ} = \rho_{A,180^\circ+60^\circ-360^\circ} = \rho_{A,-120^\circ}$,
sebab $180^\circ + 60^\circ > 180^\circ$ atau
 $\sigma_{AO} \rho_{A,-60^\circ} = \rho_{A,-180^\circ} \rho_{A,60^\circ} = \rho_{A,-180^\circ+60^\circ} = \rho_{A,-120^\circ}$,
sebab $|-180^\circ + 60^\circ| \leq 180^\circ$

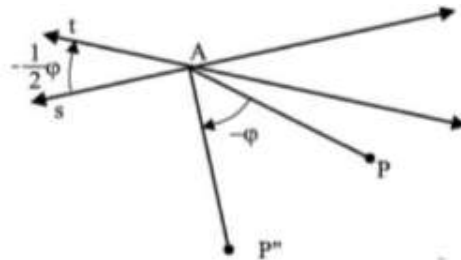
5) a) $\mu_{s \circ} \mu_t = \rho_{A,\varphi}$, jika sudut dari t ke s $= \frac{1}{2}\varphi$



Gambar 5.20

b) $\mu_{t \circ} \mu_s = \rho_{A,\varphi}$, jika sudut dari t ke s $= -\frac{1}{2}\varphi$

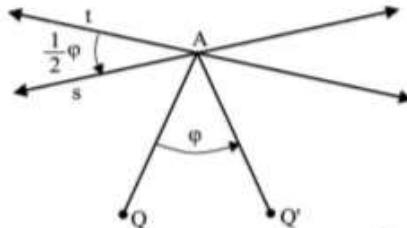
c) $\mu_s \mu_t = \rho_{A,\varphi}$, jika sudut dari t ke $s = \frac{1}{2}\varphi$



Gambar 5.21

d) Karena $m(\angle PAP') = 68^\circ$ dan sudut dari s ke

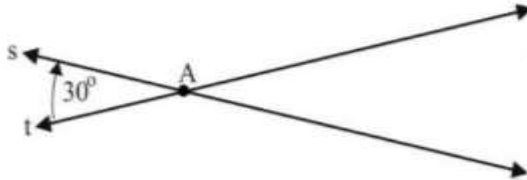
$t = -\frac{1}{2}\varphi$, maka sudut dari s ke t adalah



$$-\frac{1}{2}(68^\circ) = -34^\circ.$$

Gambar 5.22

- 6) $\mu_s \mu_t = \rho_{A, -60^\circ}$ berarti sudut dari t ke s adalah -30° dan $\{A\} = s \cap t$. Akibatnya pasangan s dan t tidak tunggal. Contoh, seperti di bawah ini.

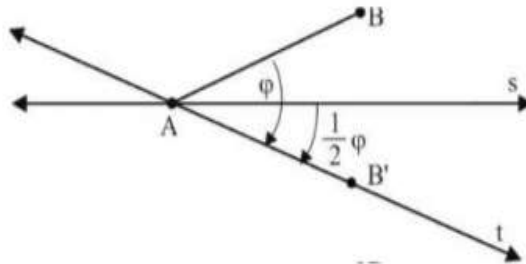


Gambar 5.23

- 7) $B' = \rho_{A, \varphi}(B) \Rightarrow m(\angle BAB') = \varphi$.

$\mu_s \mu_t = \rho_{A, \varphi} \Rightarrow$ berarti sudut dari t ke s adalah $\frac{1}{2}\varphi$

dan $s \cap t = \{A\}$, pasangan garis s dan t ini juga tidak tunggal. Contoh pasangan garis s dan t dilukis di bawah ini.



Gambar 5.24

- 8) $O(0,0)$ dan $A(1,0)$ maka,

$$\text{a) } \rho_{O,60^\circ}(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{b) } \rho_{O,45^\circ}(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2} \right)$$

$$\text{c) } \rho_{O,120^\circ}(A) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3} \right)$$

$$\text{d) } \rho_{O,135^\circ}(A) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2} \right)$$

9) Karena $O(0,0)$, $O(0,0)$, dan $O(0,0)$ maka sudut dari s ke t adalah $O(0,0)$, dan $O(0,0)$ maka,

$$\text{a) } (\mu_t \mu_s)(B) = \rho_{A,-90^\circ}(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0, -1)$$

$$(\mu_t \mu_s)(C) = \rho_{A,-90^\circ}(C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = (3, 0)$$

$$(\mu_t \mu_s)(D) = \rho_{A,-90^\circ}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = (-2, -2)$$

$$\text{b) } (\mu_t \mu_s)(P) = \rho_{A,-90^\circ}(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (y, -x)$$

$$c) (\mu_t \mu_s) = \rho_{A, -90^\circ}$$

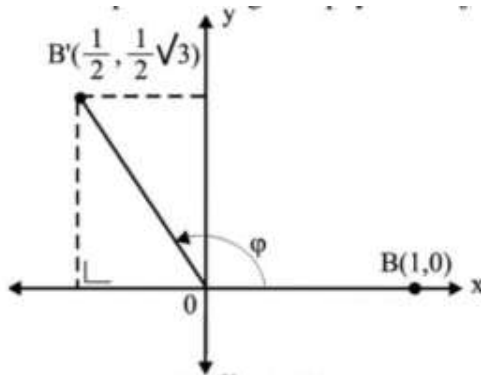
$$10) \rho_{A, -90^\circ}(B) = B', B(1,0) \text{ dan}$$

$$(B) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \cos \varphi = -\frac{1}{2} \text{ dan } \sin \varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \varphi = 120^\circ$$

Anda gambar B dan B' pada bidang V supaya lebih jelas.



Gambar 5.25

11) Pasangan garis s dan t tidak tunggal. Untuk a), b), dan c) $\mu_t \mu_s = \rho_{0, \varphi}$ hal ini berarti garis s dan t

terpotong di $O(0,0)$ dan sudut dari s ke $t = \frac{1}{2}\varphi$.

a) $\varphi = -90^\circ$ maka

$$\{(x, y) \mid y = 0\} = s, t = \{(x, y) \mid y = x\}$$

b) $\varphi = 180^\circ$ maka

$$\{(x, y) \mid y = 0\} = s, t = \{(x, y) \mid x = 0\}$$

c) $\varphi = 120^\circ$ maka

$$\{(x, y) \mid y = 0\} = s, t = \{(x, y) \mid y = -\sqrt{3}x\}$$

Untuk d) dan e) $\mu_{t_0} \mu_s = \rho_{A, \varphi}$ hal ini berarti garis s dan t berpotongan di $A(1,3)$ dan sudut dari s ke

$$t = \frac{1}{2} \varphi.$$

d) $\varphi = 90^\circ$ maka

$$\{(x, y) \mid y = 3\} = s, t = \{(x, y) \mid y - x - 2 = 0\},$$

gradient garis $t = \tan 45^\circ = 1$ dan t melalui $A(1,3)$

e) $\varphi = -60^\circ$ maka

$$\{(x, y) \mid y = 3\} = s, t = \{(x, y) \mid 3y + \sqrt{3}x - 9 + \sqrt{3} = 0\}$$

, gradient garis $t = \tan(-30^\circ)$ dan t melalui $A(1,3)$

12) Pusat L adalah $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ dan berjari-jari 2 maka,

$$\text{persamaan } L = \{(x, y) \mid (x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 4\}$$

$$\rho_{B, 45^\circ}(P) = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{untuk setiap } P(x, y),$$

misalkan $(x_0, y_0) \in L$, maka

$$a) (x_o - \sqrt{2})^2 + (y_o - \sqrt{2})^2 = 4$$

$$b) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{2}\sqrt{2}x_o - \frac{1}{2}\sqrt{2}y_o, \frac{1}{2}\sqrt{2}x_o + \frac{1}{2}\sqrt{2}y_o \right] = (x, y)$$

$$\text{Atau} \quad \frac{1}{2}\sqrt{2}x_o - \frac{1}{2}\sqrt{2}y_o = x \quad \text{dan}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}x_o + \frac{1}{2}\sqrt{2}y_o = y.$$

Apabila diselesaikan diperoleh $x_o = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$ dan

$$y_o = \frac{y-x}{\sqrt{2}}.$$

Dari a) dan b) didapat

$$\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \right)^2 + \left(\frac{y-x}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \right)^2 = 4 \text{ atau}$$

kalau diselesaikan didapat

$$(x+y-2)^2 + (y-x-2)^2 = 8.$$

Persamaan

$$L' = \rho_{B, 45^\circ}(L) = \{(x, y) \mid (x+y-2)^2 + (y-x-2)^2 = 8\}$$

atau $L' = \{(x, y) \mid 2x^2 + 2y^2 - 8y = 0\}$ suatu lingkaran.

13) a) Tentukan $s' = \rho_{A, -60^\circ}(s)$

b) Tentukan $s' \cap t = C$

c) Tentukan $B = \rho_{A, -60^\circ}(C) \in s$

d) $\triangle ABC$ sama sisi terlukis.

Bukti: $s' = \rho_{A, -60^\circ}(s)$ dan $t \cap s' = \{C\} \Rightarrow C \in s'$.

$B = \rho_{A, -60^\circ}(C) \in s$ maka $m(\angle CAB) = 60^\circ$ dan $AB = AC$.

$\therefore \triangle ABC$ sama kaki
 $\Rightarrow \angle BAC \cong \angle ACB \Rightarrow m(\angle BAC) = m(\angle ACB) = 60^\circ$

Jadi $\triangle ABC$ sama sisi.

Rangkuman

1. Sebuah rotasi mengelilingi A pada bidang Euclid V adalah sebuah rotasi $P(x, y)$ yang ditetapkan sebagai berikut: Untuk $P(x, y)$
 - a. $\rho_{A, \varphi}(A) = A$ jika $P = A$
 - b. $\rho_{A, \varphi}(P) = P'$ sehingga $m \angle (PAP') = \varphi$ dan $AP' = AP$ jika $P \neq A$
2. Suatu rotasi $\rho_{A, \varphi}$ dapat dinyatakan sebagai komposisi dua pencerminan $\mu_t \circ \mu_s$ sehingga sudut dari s ke t adalah $\frac{1}{2}\varphi$ dan $s \cap t = \{A\}$
3. Rotasi merupakan isometri langsung.
4. $\rho_{A, \varphi}^{-1} = \rho_{A, -\varphi}$
5. $\rho_{O, \varphi}(P) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ untuk setiap $P(x, y) \in V$ dan $O(0,0)$.

Kegiatan Belajar 2 : Komposisi Rotasi

A. Komposisi Rotasi Di Satu Titik

Teorema 5.10

Komposisi dua rotasi dengan (.....) pada (.....) yang sama merupakan rotasi dengan pusat yang sama pula.

Bukti:

Titik A pada bidang Euclid V , dan $-180^\circ < \varphi_1 < 180^\circ$ dan $-180^\circ < \varphi_2 < 180^\circ$, ρ_{A,φ_1} dan ρ_{A,φ_2}

Berdasarkan teorema 5.4, $\rho_{A,\varphi_1} = \mu_t \circ \mu_s$ dengan $\{A\} = t \cap s$

dan sudut dari s ke t adalah $\frac{1}{2}\varphi_1$ dan $\rho_{A,\varphi_2} = \mu_m \circ \mu_t$

dengan $\{A\} = m \cap t$ dan sudut dari t ke m adalah $\frac{1}{2}\varphi_2$.

Dengan demikian, sudut dari s ke m adalah $\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$.

$$\rho_{A,\varphi_2} \circ \rho_{A,\varphi_1} = (\mu_m \circ \mu_t)(\mu_t \circ \mu_s)$$

$$= \mu_m \circ (\mu_t \circ \mu_t) \circ \mu_s$$

$$= \mu_m \circ \varepsilon \circ \mu_s$$

$$= \mu_m \circ \mu_s$$

$$= \rho_{A,\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$= \rho_{A,\varphi} \text{ dengan } \varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Hubungkan antara φ_1 , φ_2 , dan φ sehingga

$\rho_{A,\varphi_1} \circ \rho_{A,\varphi_2} = \rho_{A,\varphi}$ dapat dipelajari pada teorema 5.11.

Teorema 5.11

Bila φ_1 dan φ_2 maka terdapat hubungan berikut ini.

1. Jika $0^\circ < |\varphi_1 + \varphi_2| < 180^\circ$ maka $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.
2. Jika $|\varphi_1 + \varphi_2| = 180^\circ$ maka $\rho_{A,\varphi}$ suatu setengah putaran.
3. Jika $\varphi_1 + \varphi_2 > 180^\circ$ maka $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - 360^\circ$.
4. Jika $\varphi_1 + \varphi_2 < -180^\circ$ maka $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + 360^\circ$.
5. Jika $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$ maka $\rho_{A,\varphi}$ suatu identitas.

Bukti:

1. $0^\circ < |\varphi_1 + \varphi_2| < 180^\circ$ berarti $-180^\circ < \varphi_1 + \varphi_2 < 180^\circ$.

Karena $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ maka $-180^\circ < \varphi < 180^\circ$. Jadi φ memenuhi definisi 5.5.

2. $|\varphi_1 + \varphi_2| = 180^\circ$ berarti a) $\varphi_1 + \varphi_2 = 180^\circ$ atau b) $\varphi_1 + \varphi_2 = -180^\circ$. Untuk $\varphi_1 + \varphi_2 = 180^\circ$ maka $\rho_{A,\varphi}(P) = \rho_{A,180^\circ}(P)$. Misalkan $P' = \rho_{A,180^\circ}(P)$ maka $m(\angle PAP') = 180^\circ$, dan $PA = P'A$. Hal ini berarti bahwa A titik tengah $\overline{PP'}$. Jadi, $\sigma_A(P) = P'$. Artinya $\rho_{A,\varphi}(P) = \sigma_A(P), \forall P \in V$. Akibatnya $\rho_{A,\varphi} = \sigma_{A,\varphi}$ dengan $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 180^\circ$. Untuk $\varphi_1 + \varphi_2 = -180^\circ$ maka $\rho_{A,\varphi}(P) = \rho_{A,-180^\circ}(P)$. Misalkan $P' = \rho_{A,-180^\circ}(P)$ maka $m(\angle PAP') = -180^\circ$ dan

$PA = P'A$. Hal ini, berarti juga bahwa A titik tengah $\overline{PP'}$. Jadi, $\sigma_A(P) = P'$. Artinya

$\rho_{A,\varphi}(P) = \sigma_A(P), \forall P \in V$. Akibatnya $\rho_{A,\varphi} = \sigma_{A,\varphi}$

dengan $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = -180^\circ$. Jadi, apabila

$|\varphi_1 + \varphi_2| = 180^\circ$ maka $\rho_{A,\varphi}$ suatu setengah putaran.

3. $\varphi_1 + \varphi_2 > 180^\circ$, tetapi Anda mengetahui dari definisi

5.5 bahwa $\varphi_1 + \varphi_2 < 360^\circ$. Artinya didapat:

$$\begin{aligned} 180^\circ &< \varphi_1 + \varphi_2 < 360^\circ \\ \Rightarrow 180^\circ - 360^\circ &< \varphi_1 + \varphi_2 - 360^\circ < 360^\circ - 360^\circ \\ \Rightarrow -180^\circ &< \varphi_1 + \varphi_2 - 360^\circ < 0^\circ \\ \Rightarrow -180^\circ &< \varphi_1 + \varphi_2 - 360^\circ < 180^\circ \\ \Rightarrow -180^\circ &< \varphi_1 + \varphi_2 < 180^\circ \end{aligned}$$

Sehingga syarat Definisi 5.5 terpenuhi dengan $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - 360^\circ$.

4. $\varphi_1 + \varphi_2 < -180^\circ$, tetapi Anda mengetahui dari

Definisi 5.5. bahwa $\varphi_1 + \varphi_2 > -360^\circ$. Akibatnya didapat:

$$\begin{aligned} -360^\circ &< \varphi_1 + \varphi_2 < -180^\circ \\ \Rightarrow -360^\circ + 360^\circ &< \varphi_1 + \varphi_2 + 360^\circ < -180^\circ + 360^\circ \\ \Rightarrow 0^\circ &< \varphi_1 + \varphi_2 + 360^\circ < 180^\circ \\ \Rightarrow -180^\circ &< \varphi_1 + \varphi_2 + 360^\circ < 180^\circ \\ \Rightarrow -180^\circ &< \varphi_1 + \varphi_2 < 180^\circ \end{aligned}$$

Jadi, $\varphi_1 + \varphi_2 < 180^\circ$ memenuhi syarat dari Definisi 5.5 dengan $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + 360^\circ$.

5. $\varphi_1 + \varphi_2 = 0^\circ$ maka $\varphi_2 = 0^\circ - \varphi_1 = -\varphi_1$ sehingga:

$$\rho_{A,\varphi} = \rho_{A,\varphi} \circ \rho_{A,\varphi} = \rho_{A,\varphi_1+\varphi_2} = \rho_{A,\varphi_1-\varphi_1} = \rho_{A,0}$$

Teorema 5.12

Himpunan yang terdiri dari semua (.....) dengan pusat yang sama membentuk sistem matematika grup terhadap operasi “ $\circ$ ”.

Bukti:

Anda telah mengetahui dari Modul 1, bahwa himpunan semua transformasi T membentuk grup terhadap operasi komposisi (.....). Karena setiap (.....) merupakan transformasi, apabila R himpunan semua rotasi-rotasi dengan pusat yang sama maka $R \subset T$. Berdasarkan Teorema 5.10, operasi komposisi “ $\circ$ ” tertutup pada R , dan berdasarkan Teorema 5.9, apabila $\rho_{A,\varphi} \in R$ maka $(\rho_{A,\varphi})^{-1} = (\rho_{A,-\varphi}) \in R$. Karena R tertutup terhadap operasi komposisi dan setiap $\rho_{A,\varphi} \in R$ mengakibatkan $(\rho_{A,\varphi})^{-1} \in R$, berdasarkan teorema dan struktur Aljabar tentang subgrup maka $(R, \circ)$ merupakan subgrup transformasi $(T, \circ)$. Jadi, $(R, \circ)$ adalah (.....).

B. Komposisi Rotasi Dengan Pusat Berlainan

Teorema 5.13

Komposisi dua rotasi dengan pusat pada titik berbeda adalah rotasi atau sebuah (.....).

Bukti:

Ambil dua rotasi sebarang ρ_{A,φ_1} dan ρ_{B,φ_2} , $A \neq B$. Tarik garis $s = \overleftrightarrow{AB}$. Ambil garis l , s , t sehingga $s \cap t = \{A\}$, $l \cap s = \{B\}$ dan sudut dari t dan s adalah $\frac{1}{2}\varphi_1$

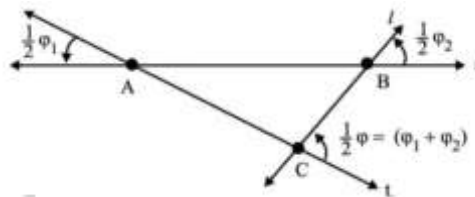
dan sudut dari s ke t adalah $\frac{1}{2}\varphi_2$. Maka $\rho_{A,\varphi_1} = \mu_s \circ \mu_t$ dan

$$\rho_{A,\varphi_2} = \mu_l \circ \mu_s \text{ (Gambar 5.1).}$$

$$\rho_{B,\varphi_2} \circ \rho_{A,\varphi_1} = (\mu_l \circ \mu_s) \circ (\mu_s \circ \mu_t)$$

$$= \mu_l \circ (\mu_s \circ \mu_s) \circ \mu_t$$

$$= \mu_l \circ \varepsilon \circ \mu_t$$



$$= \mu_l \circ \mu_t$$

Gambar 5.26

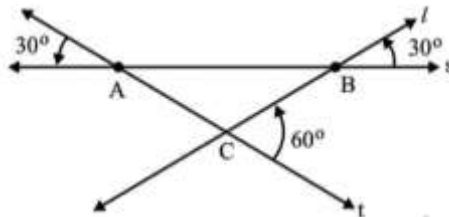
Contoh:

Diberikan dua titik A dan B, $A \neq B$ pada bidang V , $\varphi_1 = 60^\circ$ dan $\varphi_2 = 60^\circ$. Lukis titik C sehingga $\rho_{B,\varphi_2} \circ \rho_{A,\varphi_1} = \rho_{C,\varphi}$. Kemudian tentukan sudut φ .

Penyelesaian:

Ambil garis $s = \overleftrightarrow{AB}$. Buat garis t melalui A sehingga sudut dari t ke s adalah $30^\circ = \frac{1}{2}\varphi_1$. Buat garis l melalui B sehingga sudut dari s ke l adalah $30^\circ = \frac{1}{2}\varphi_2$. Titik C merupakan irisan antara garis t dan l.

$$\begin{aligned}\rho_{B,\varphi_2} \circ \rho_{A,\varphi_1} &= (\mu_l \circ \mu_s) \circ (\mu_s \circ \mu_t) \\ &= \mu_l \circ \mu_t\end{aligned}$$



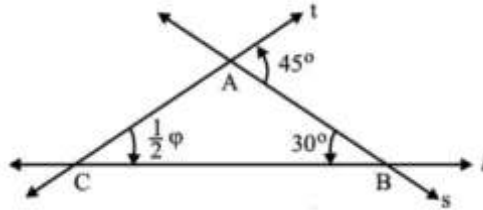
Gambar 5.27

Maka sudut $\frac{1}{2}\varphi$ adalah ukuran sudut dari t ke l, yaitu

$$30^\circ + 30^\circ = 60^\circ. \text{ Jadi, } \varphi = 120^\circ = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Contoh:

Diberikan dua titik A dan B, $A \neq B$ pada bidang V , $\varphi_1 = 60^\circ$ dan $\varphi_2 = -90^\circ$. Lukis titik C sehingga $\rho_{C,\varphi} = \rho_{B,60^\circ} \circ \rho_{A,-90^\circ}$



. Kemudian tentukan sudut φ .

Gambar 5.28

Penyelesaian:

Ambil garis $s = \overleftrightarrow{AB}$. Buat garis t melalui A sehingga sudut dari t ke s adalah $-45^\circ = \frac{1}{2}\varphi_2$. Buat garis l melalui B sehingga sudut dari s ke l adalah $30^\circ = \frac{1}{2}\varphi_1$. Titik C merupakan irisan antara garis t dan l.

$$\frac{1}{2}\varphi = -(180^\circ - (135^\circ + 30^\circ)) = -15^\circ$$

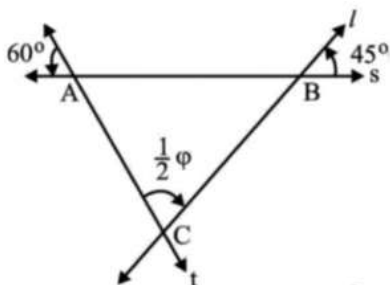
$$\therefore \varphi = -30^\circ = -90^\circ + 60^\circ = \varphi_2 + \varphi_1$$

.

Contoh:

Diberikan dua titik A dan B, $A \neq B, \varphi_1 = 120^\circ, \varphi_2 = 90^\circ$.

Tentukan C dan φ sehingga $\rho_{B, \varphi_2} \circ \rho_{A, \varphi_1} = \rho_{C, \varphi}$.



Gambar 5.29

Penyelesaian:

Ambil garis $s = \overleftrightarrow{AB}$. Buat garis t melalui A sehingga sudut dari t ke s adalah $60^\circ = \frac{1}{2}\varphi_1$, dan garis l melalui B sehingga sudut dari s ke l adalah $45^\circ = \frac{1}{2}\varphi_2$. Maka C melalui titik potong t dan l.

$$\frac{1}{2}\varphi = -(180^\circ - (60^\circ + 45^\circ)) = -75^\circ \Rightarrow \varphi = -150^\circ$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 - 360^\circ = 120^\circ + 90^\circ - 360^\circ = -150^\circ$$

$$\text{Jadi, } \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - 360^\circ$$

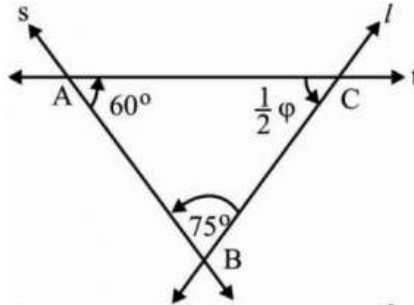
Contoh:

Diberikan dua titik A dan B, $A \neq B, \varphi_1 = -120^\circ, \varphi_2 = -150^\circ$.

Tentukan C dan φ sehingga $\rho_{B, \varphi_2} \circ \rho_{A, \varphi_1} = \rho_{C, \varphi}$.

Penyelesaian:

Ambil garis $s = \overleftrightarrow{AB}$. Buat garis t melalui A sehingga sudut dari t ke s adalah $-60^\circ = \frac{1}{2}\varphi_1$, dan garis l melalui B sehingga



Gambar 5.30

sudut dari s ke l adalah $-75^\circ = \frac{1}{2}\varphi_2$.

$$\frac{1}{2}\varphi = (180^\circ - (60^\circ + 75^\circ)) = 45^\circ \Rightarrow \varphi = 90^\circ$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 + 360^\circ = -120^\circ - 150^\circ + 360^\circ = 90^\circ$$

Jadi, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + 360^\circ$

Apabila anda masih belum yakin mengenai kaidah pada bukti Teorema 5.13, dipersilahkan mencari sendiri sesuai kasus tersebut diatas, sebagai latihan. Permasalahan timbul yaitu cara menentukan titik C yang memenuhi

$\rho_{B,\varphi_2} \circ \rho_{A,\varphi_1} = \rho_{C,\varphi}$, apabila pada bidang Euclid V terdapat koordinat ortogonal. Untuk menyelesaikan masalah ini, anda mempelajari contoh berikut ini.

Contoh:

Apabila $A(-1,0), B(2,0), \varphi_1 = 90^\circ$ dan $\varphi_2 = 60^\circ$. Tentukan koordinat titik C dan φ sehingga $\rho_{B,\varphi_2} \circ \rho_{A,\varphi_1} = \rho_{C,\varphi}$.

Penyelesaian:

$A(-1,0), B(2,0)$ maka $\overleftrightarrow{AB} = \{(x, y) \mid y = 0\}$ sebagai garis s. Garis t melalui A sehingga sudut dari t ke s adalah 45° . Akibatnya koefisien arah dari t adalah $\tan 135^\circ = -1$. Oleh sebab itu,

$t = \{(x, y) \mid y - 0 = -1(x + 1)\} = \{(x, y) \mid y + x + 1 = 0\}$. Garis l melalui B sehingga sudut dari s ke l adalah 30° . Akibatnya koefisien arah dari l adalah $30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Sehingga

persamaan

$$l = \left\{ (x, y) \mid y - 0 = \frac{1}{3}\sqrt{3}(x - 2) \right\} = \left\{ (x, y) \mid 3y - \sqrt{3}x + 6\sqrt{3} = 0 \right\}$$

C perpotongan antara t dan l maka koordinat C didapat dari:

$$y + x + 1 = 0 \text{ dan } 3y - \sqrt{3}x + 6\sqrt{3} = 0$$

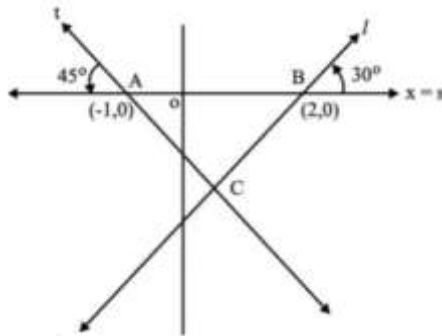
Apabila anda selesaikan akan diperoleh:

$$x = \frac{7\sqrt{3}-9}{2} \quad y = \frac{-7\sqrt{3}+7}{2}. \text{ Jadi, } C \left\{ \frac{7\sqrt{3}-9}{2}, \frac{-7\sqrt{3}+7}{2} \right\}$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ < 180^\circ \text{ maka}$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 150^\circ$$

Perhatikan gambar lukisan pada gambar 5.31.



Gambar 5.31

C. Komposisi Rotasi dengan Translasi

Teorema 5.14

Komposisi sebuah (.....) dan sebuah (.....) adalah sebuah rotasi yang sudut rotasinya sama dengan sudut rotasi yang diketahui.

Bukti:

Ambil sebarang rotasi $\rho_{A,\varphi}$ dan translasi γ_{BC} . Komposisi kedua isometri ini adalah:

a) $\rho_{A,\varphi} \circ \gamma_{BC}$; dan

b) $\gamma_{BC} \circ \rho_{A,\varphi}$,

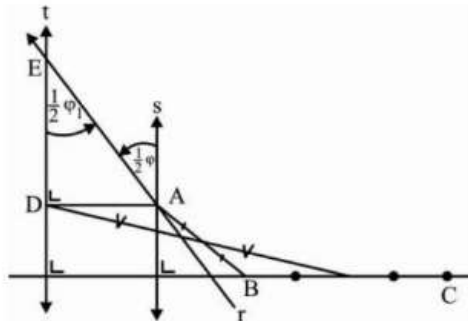
Untuk a) $\rho_{A,\varphi} \circ \gamma_{BC}$.

Misalkan $\overline{2DA} = \overline{BC}$. Misalkan garis t melalui D tegak lurus $\overline{BC}$ dan garis s melalui A sejajar t maka $\gamma_{BC} = \mu_s \circ \mu_t$.

Misalkan garis r melalui A sehingga sudut dari s ke r adalah $\frac{1}{2}\varphi$ maka $\rho_{A,\varphi} = \mu_s \circ \mu_t$. Akibatnya didapat:

$$\begin{aligned}
 \rho_{A,\varphi} \circ \gamma_{BC} &= (\mu_r \circ \mu_s) \circ (\mu_s \circ \mu_t) \\
 &= \mu_r \circ (\mu_s \circ \mu_s) \circ \mu_t \\
 &= \mu_r \circ \varepsilon \circ \mu_t \\
 &= \mu_r \circ \mu_t \\
 &= \rho_{E,\varphi_1}
 \end{aligned}$$

Dimana $\varphi_1 = \varphi$ dan $\{E\} = r \cap t$



Gambar 5.32

Teorema 5.15

Himpunan semua translasi dan rotasi membentuk sistem matematika grup terhadap operasi (.....) “ $\circ$ ”.

Latihan:

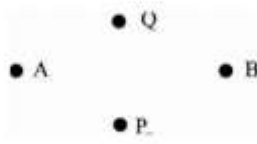
- 1) Diketahui titik-titik A, B, dan P seperti Gambar 6.8.



Gambar 6.8

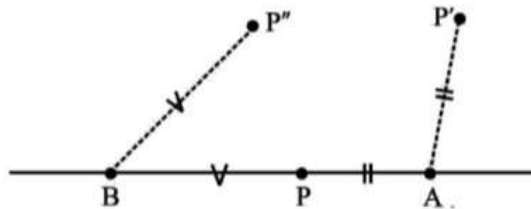
- a) Jika $T = \rho_{B,30^\circ} \circ \rho_{A,90^\circ}$ maka lukis $A' = T(A)$ dan $T' = T(P)$.

- b) Tentukan C pusat rotasi dari T.
 c) Tentukan $m(\angle PCP')$
- 2) Diketahui titik A, B, P, dan Q seperti pada Gambar 5.36. jika $T = \rho_{A,135^\circ} \circ \rho_{B,-45^\circ}$. Lukis $P' = T(P)$ dan $Q' = T(Q)$ dan tentukan pusat rotasi T.



Gambar 6.9

- 3) Jika A, B, P, P', dan P'' titik-titik, seperti pada Gambar



Gambar 5.33

5.33 dengan $P' = \rho_{A,\varphi_1}(P)$ dan $P'' = \rho_{B,\varphi_2}(P)$.

Tentukan C sehingga $\rho_{C,\varphi} = \rho_{B,\varphi_2} \circ \rho_{A,\varphi_1}$.

- 4) Jika $\rho_{C,\varphi} = \rho_{B,\varphi_2} \circ \rho_{A,\varphi_1}$. Tentukan φ jika:
- $\varphi_1 = 30^\circ, \varphi_2 = 135^\circ$
 - $\varphi_1 = -90^\circ, \varphi_2 = 160^\circ$
 - $\varphi_1 = 150^\circ, \varphi_2 = 120^\circ$

- d) $\varphi_1 = -100^\circ, \varphi_2 = -130^\circ$
- 5) Selesaikan tiap persamaan berikut sehingga $-180^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$.
- a) $(\rho_{G,\varphi})^3 = \rho_{A,-120^\circ}$
- b) $(\rho_{A,\varphi})^4 = \varepsilon$
- c) $\rho_{B,\varphi} \circ \rho_{C,-40^\circ} = \rho_{D,160^\circ}$
- d) $\rho_{A,60^\circ} \circ \rho_{B,\varphi} \circ \rho_{C,-90^\circ} = \rho_{C,45^\circ}$
- 6) Jika $A(2,0)$ dan $O(0,0)$ dan $T = \sigma_A \circ \rho_{A,90^\circ}$, maka tentukan:
- a) Macam pemetaan T .
- b) Semua koordinat titik K sehingga $T(K)=K$.
- 7) Diketahui $T = \rho_{A,60^\circ} \circ \rho_{B,-60^\circ}$, $A(0,0)$ dan $B(4,0)$,
- a) Tentukan macam pemetaan T .
- b) Jika P sebarang titik dan $P'=T(P)$, tentukan PP' .
- 8) Diketahui titik A dan B dengan $A \neq B$, lukis semua titik P sehingga $\rho_{C,60^\circ}(P) = \rho_{A,90^\circ}(P)$
- 9) Jika $\triangle ABC$ sebuah segitiga sama sisi dan P titik diketahui dan $T = \rho_{C,120^\circ} \circ \rho_{B,120^\circ} \circ \rho_{A,120^\circ}$,
- a) Lukis $A'=T(A)$
- b) Lukis $P'=T(P)$
- c) Nyatakanlah T .

Rangkuman

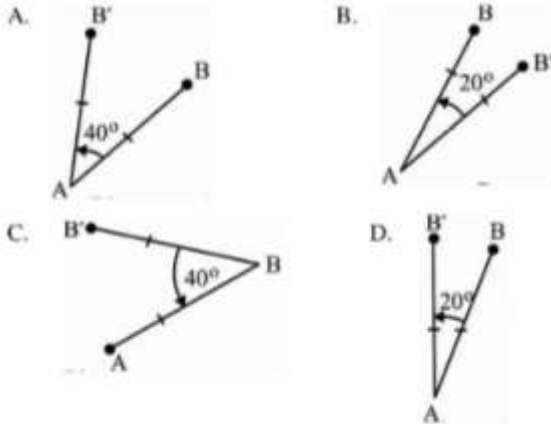
1. Komposisi rotasi dengan pusat pada titik yang sama merupakan rotasi dengan pusat yang sama pula.
2. Himpunan semua rotasi yang berpusat sama membentuk system matematika grup terhadap operasi komposisi.
3. Komposisi dua rotasi dengan pusat pada titik berbeda adalah sebuah rotasi atau sebuah translasi.
4. Komposisi sebuah rotasi dan sebuah translasi adalah sebuah rotasi yang sudut rotasinya sama dengan sudut rotasi yang diketahui.
5. Himpunan semua rotasi dan translasi membentuk system matematika grup terhadap operasi komposisi.

Tes Formatif Modul 5

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Diberikan titik A dan B serta dua garis s dan t melalui

A. lukisan titik B' sehingga $B' = \rho_{A,\varphi}(B')$ adalah



2) Jika diberikan $A(2,2)$ dan $B(-1,2)$ maka koordinat titik D sehingga $D = \rho_{A,60^\circ}(A)$ adalah

- A. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3} + 2\right)$
- B. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3} - 2\right)$
- C. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3} + 2\right)$
- D. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3} - 2\right)$

3) Diberikan titik $A(1,-2)$. Persamaan garis s dan t yang memenuhi syarat $\mu_t \circ \mu_s = \rho_{A,-90^\circ}$ adalah

- A. $s = \{(x, y) \mid x = 1\}, t = \{(x, y) \mid y = -1 - x\}$
- B. $s = \{(x, y) \mid y = -2\}, t = \{(x, y) \mid y - x + 3 = 0\}$
- C. $s = \{(x, y) \mid x = 1\}, t = \{(x, y) \mid y - x + 3 = 0\}$
- D. $s = \{(x, y) \mid x = y\}, t = \{(x, y) \mid y = 0\}$

4) Perhatikan gambar berikut ini:
dengan $m(\angle ABC) = 20^\circ$,
 $m(\angle CAD) = 130^\circ$. Sudut dari

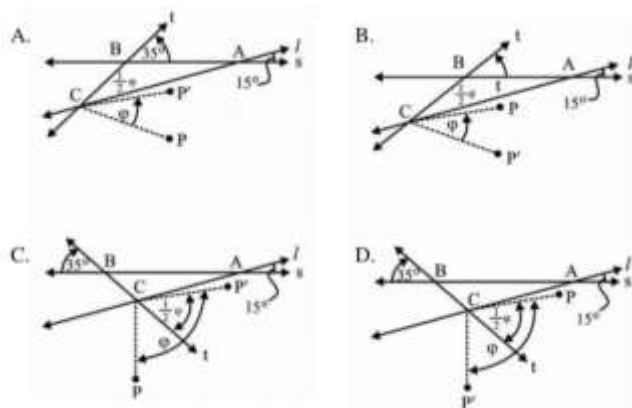
$\overrightarrow{AC}$ ke $\overrightarrow{BC}$ adalah

- A. 110°
- B. -70°
- C. -110°
- D. 70°

5) Jika $A(0,0)$ dan $C(1,-3)$ maka koordinat titik D sehingga $C = \rho_{A,-60^\circ}(D)$ adalah

- A. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad , \quad \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)$
- B. $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad , \quad \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)$
- C. $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad , \quad \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right)$

- 6) Diketahui titik A, B, dan P. lukisan yang benar dalam rangka menentukan titik P' sehingga



$$P = \rho_{B,30^\circ} \circ \rho_{A,-70^\circ}(P') \text{ adalah } \dots$$

- 7) Apabila $\rho_{C,\varphi} = \rho_{B,\varphi_2} \circ \rho_{A,\varphi_1}$ dan

$$\varphi_1 = -120^\circ, \varphi_2 = -160^\circ \text{ maka nilai } \varphi \text{ adalah } \dots$$

- A. -640°
- B. 80°
- C. -100°
- D. -280°

- 8) Diberikan pernyataan-pernyataan berikut:

I. $\rho_{A,\varphi} \circ \gamma_{AC} = \rho_{B,\varphi_2} \circ \varphi_1 = \varphi$

II. $\rho_{A,\varphi_1} \circ \rho_{B,\varphi_2} = \rho_{B,\varphi_2} \circ \rho_{A,\varphi_1}$

III. $\rho_{A,\varphi_1} \circ \rho_{A,\varphi_2} = \rho_{A,\varphi_2} \circ \rho_{A,\varphi_1}$

Pernyataan diatas yang benar adalah

- A. I, II saja

- B. II, III saja
- C. I, III saja
- D. I, II, III

9) Diberikan pernyataan-pernyataan berikut:

- I. Jika $\varphi_1 = \varphi_2$ maka $\rho_{A,\varphi_1} \circ \rho_{A,\varphi_2}$ tidak memiliki titik invariant
- II. Jika $\varphi_2 = \varphi_1$ maka $\rho_{A,\varphi_2} \circ \rho_{B,\varphi_1}$ tidak memiliki titik invariant
- III. Himpunan semua rotasi membentuk grup terhadap operasi komposisi
- IV. Jika $\varphi_1 - \varphi_2 < -180^\circ$ dan $\rho_{A,\varphi_1} \circ \rho_{B,\varphi} = \rho_{C,\varphi_2}$, maka $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 - 360^\circ$

Dari 4 (empat) pernyataan diatas yang benar adalah

.....

- A. I, III saja
- B. II, IV saja
- C. I, II, III, saja
- D. I, II, III, IV

10) Diberikan titik A(0,0), B(0,1) dan P(4,0). Koordinat

titik P' sehingga $P' = \rho_{A,90^\circ} \circ \rho_{B,45^\circ}(P)$ adalah

- A. $\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}-1, \frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$
- B. $\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}-1, -\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$

C. $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2} + 1, \frac{5}{2}\sqrt{2} \right)$

D. $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2} + 1, -\frac{5}{2}\sqrt{2} \right)$

MODUL 6

Refleksi Geser dan Grup Isometri

Kegiatan Belajar 1 : Refleksi Geser

Definisi 6.1

Pemetaan γ disebut (.....) apabila ada garis v dan sebuah ruas garis berarah $\overrightarrow{AB}$ yang sejajar v sehingga $\gamma = \gamma_{AB} \circ \mu_v$, dengan v disebut sumbu refleksi geser.

Teorema 6.1

Refleksi geser adalah sebuah transformasi.

Teorema 6.2

Refleksi geser adalah sebuah isometri.

Teorema 6.3

Refleksi geser merupakan isometri lawan.

Teorema 6.4

Komposisi refleksi dengan rotasi yang pusatnya tidak pada garis yang dikomposisikan adalah (.....).

Teorema 6.5 (Teorema akibat)

Jika ruas garis berarah $\overrightarrow{AB}$ tidak tegak lurus terhadap garis s yang diketahui, maka komposisi translasi γ_{AB} dengan refleksi μ_s adalah (.....).

Teorema 6.6

Jika ruas garis berarah $\overrightarrow{AB}$ tegak lurus terhadap garis s yang diketahui, maka komposisi translasi γ_{AB} dengan refleksi μ_s adalah (.....).

Teorema 6.7

Misal diketahui tiga buah garis r , s , dan t yang ketiganya tidak kongruen (kongruen = melalui satu titik) dan tidak ketiganya sekaligus sejajar, maka komposisi refleksi terhadap ketiga garis itu adalah suatu (.....).

Teorema 6.8

Diberikan γ refleksi geser dan P adalah sebarang titik. Bila v sumbu refleksi geser γ , maka v melalui titik tengah $\overline{PP'}$ dengan $p' = \gamma(P)$.

Contoh 6.1 :

Diketahui $A(2, -3)$, $B(6,4)$, $t = \{(x, y) | y = 0\}$, dan $\gamma = \gamma_{AB} \circ \mu_v$. Tentukan $\gamma((1,2))$!

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}\gamma((1,2)) &= (\gamma_{AB} \circ \mu_t)((1,2)) = \gamma_{AB}(\mu_t(1,2)) \\ &= \gamma_{AB}(1,-2) \\ &= ((6-2)+1, (4+3)-2) \\ &= (5,5)\end{aligned}$$

Contoh 6.2 :

Diketahui $A(2, 0)$, $B(6,4)$, dan $\gamma((1,2)) = (\gamma_{AB} \circ \mu_v)(1,2)$. Tentukan persamaan sumbu refleksi geser γ !

Penyelesaian :

$\gamma = \gamma_{AB} \circ \mu_v$, maka menurut Definisi 6.1 sumbu, bahwa refleksi geser γ adalah garis t yang sejajar dengan $\overleftrightarrow{AB}$. Karena $\gamma((1,2)) = (-5,2)$, maka menurut Teorema 6.8, garis t melalui titik tengah dari ruas garis yang titik-titik ujungnya $(1,2)$ dan $(-5,2)$. Misal titik tengah ruas garis tersebut adalah X , maka koordinat $X(-2,2)$. Garis t mempunyai gradien $m_{AB} = 1$ dan melalui $(-2,2)$, maka persamaan t adalah $y - 2 = x + 2$ atau $y - x - 4 = 0$. Jadi, persamaannya $t = \{(x, y) \mid y - x - 4 = 0\}$.

Latihan

- 1) Jika γ merupakan komposisi translasi γ_{AB} dengan pencerminan μ_s , di mana $\overleftrightarrow{AB} \parallel s$. Tentukan sumbu dari γ !
- 2) Jika γ refleksi geser, tunjukkan bahwa γ isometri lawan!
- 3) Diberikan γ refleksi geser dan $\gamma(P) = P'$ dengan garis v adalah sumbu refleksi geser. Apakah garis v melalui titik tengah $\overline{PP'}$?
- 4) Diberikan $\gamma A(1,2), B(3,5), t = \{(x, y) \mid x = 0\}$ dan $\gamma = \gamma_{AB} \circ \mu_t$. Tentukan $\gamma((4,-2))$!!
- 5) Diberikan $A(2,-3), B(6,4)$, dan $\gamma((1,2)) = (5,9)$. Tentukan sumbu refleksi geser γ !

Rangkuman

1. Jika γ adalah refleksi geser dengan $\gamma = \gamma_{AB} \circ \mu_v$, maka v adalah sumbu refleksi geser dan $v \parallel \overrightarrow{AB}$.
2. Refleksi geser merupakan isometri lawan.
3. Komposisi refleksi dengan rotasi yang pusatnya tidak pada garis yang dikomposisikan merupakan refleksi geser.
4. Jika $\overrightarrow{AB}$ tidak tegak lurus terhadap garis s yang diketahui, maka komposisi translasi γ_{AB} dengan refleksi μ_s adalah refleksi geser.
5. Jika $\overrightarrow{AB}$ tegak lurus terhadap garis s yang diketahui, maka komposisi translasi γ_{AB} dengan refleksi μ_s adalah refleksi pencerminan.
6. Komposisi refleksi terhadap tiga buah garis yang ketiganya tidak melalui satu titik dan tidak ketiganya sekaligus sejajar adalah suatu refleksi geser.
7. Jika γ refleksi geser dengan sumbu v , maka v melalui titik tengah $\overline{PP'}$ dengan $P' = \gamma(P)$ untuk sebarang P .

Kegiatan Belajar 2 : Grup Isometri.

Definisi 6.2 :

Suatu himpunan $S \neq \emptyset$ himpunan kosong dan operasi $\circ$ yang dinotasikan dengan $(S, \circ)$ disebut (.....), jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. S tertutup terhadap operasi $\circ$, artinya $\forall a, b \in S, a \circ b \in S$.
2. Operasi $\circ$ asosiatif pada S , artinya $\forall a, b, c \in S, (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
3. Ada unsur identitas, untuk setiap anggota S , artinya $\exists e \in S, \forall a \in S, a \circ e = e \circ a = a$
4. Untuk setiap anggota S , mempunyai balikan di S , artinya: $\forall a \in S, \exists b \in S, a \circ b = b \circ a = e$

Keterangan : $\forall$ dibaca untuk setiap, $\exists$ dibaca terdapat atau ada.

Teorema 6.9:

Himpunan isometri G yang anggota-anggotanya refleksi, translasi, rotasi, dan refleksi geser adalah (.....) terhadap operasi komposisi.

Definisi 6.3:

Jika $H \subset G$ dengan $H \neq \emptyset$ himpunan kosong, $(G, \circ)$ adalah grup, dan jika $(H, \circ)$ grup, maka $\circ$ disebut (.....) dari grup $(G, \circ)$.

Contoh 6.3:

Himpunan T merupakan himpunan semua translasi, maka T dapat ditulis $T = \{\gamma_{nAB} \mid n \text{ bilangan bulat}\}$ dan $\circ$ adalah operasi komposisi. Periksalah apakah $(T, \circ)$ merupakan grup!

Penyelesaian:

Aksioma 1:

Menurut teorema, operasi $\circ$ tertutup pada himpunan $(\dots\dots\dots)$. (Untuk jelasnya coba lihat kembali sifat ketertutupan translasi terhadap operasi komposisi). Jadi aksioma ketertutupan terpenuhi.

Aksioma 2:

Juga menurut teorema operasi komposisi pada translasi bersifat $(\dots\dots\dots)$. Jadi, Aksioma 2 terpenuhi.

Aksioma 3:

Translasi γ_{nAB} dengan $n = 0$, maka berarti γ_{0AB} merupakan identitas. Sehingga $\gamma_{nAB} \circ \gamma_{0AB} = \gamma_{0AB} \circ \gamma_{nAB} = \gamma_{nAB}$. Jadi, identitasnya ada yaitu γ_{0AB} .

Aksioma 4:

Balikan dari γ_{nAB} adalah γ_{-nAB} sebab $\gamma_{nAB} \circ \gamma_{-nAB} = \gamma_{-nAB} \circ \gamma_{nAB} = \gamma_{0AB}$. Jadi, ada invers (balikan) untuk setiap translasi γ_{nAB} yaitu γ_{-nAB} .

Karena Aksioma 1 sampai Aksioma 4 dipenuhi, maka $(T, \circ)$ merupakan grup. Karena $T \subset G$ dimana $(G, \circ)$ dan $(T, \circ)$ grup, maka $(T, \circ)$ disebut subgrup

dari $(G, \circ)$ atau himpunan translasi-translasi dengan operasi komposisi merupakan subgrup dari $(\dots\dots\dots)$.

Contoh 6.4:

Perhatikan bahwa himpunan rotasi-rotasi yang pusatnya titik tertentu dengan operasi komposisi merupakan grup.

Penyelesaian:

Apabila R adalah himpunan rotasi-rotasi yang pusatnya titik tertentu, maka R dapat ditulis $R = \{\rho_{A,\varphi} \mid -180^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ\}$. Akan ditunjukkan bahwa $(R, \circ)$ adalah grup!

Aksioma 1:

Sifat tertutupan. Ambil dua rotasi yang pusatnya A , misal ρ_{A,φ_1} dan ρ_{A,φ_2} , maka $\rho_{A,\varphi_1} \circ \rho_{A,\varphi_2} = \rho_{A,\varphi_1+\varphi_2}$ merupakan rotasi dengan pusat A dan besar sudut rotasinya diantara -180° sampai dengan 180° .

Aksioma 2:

Karena sifat asosiatif berlaku pada operasi penjumlahan bilangan real φ_1, φ_2 dan φ_3 , yaitu

$$(\varphi_1 + \varphi_2) + \varphi_3 = \varphi_1 + (\varphi_2 + \varphi_3), \quad \text{maka}$$

$$(\rho_{A,\varphi_1} \circ \rho_{A,\varphi_2}) \circ \rho_{A,\varphi_3} = \rho_{A,\varphi_1} \circ (\rho_{A,\varphi_2} \circ \rho_{A,\varphi_3}). \quad \text{Jadi,}$$

Aksioma 2 dipenuhi.

Aksioma 3:

Ada rotasi identitas, yaitu $\rho_{A,0}$ sedemikian rupa sehingga $\rho_{A,\varphi_1} \circ \rho_{A,0} = \rho_{A,0} \circ \rho_{A,\varphi_1} = \rho_{A,\varphi_1}$. Jadi, Aksioma 3 dipenuhi.

Aksioma 4:

Untuk setiap rotasi ρ_{A,φ_1} mempunyai balikan, yaitu rotasi $\rho_{A,-\varphi_1}$ sedemikian sehingga $\rho_{A,\varphi_1} \circ \rho_{A,-\varphi_1} = \rho_{A,-\varphi_1} \circ \rho_{A,\varphi_1} = \rho_{A,0}$. Jadi, Aksioma 4 dipenuhi.

Karena keempat aksioma grup diatas dipenuhi, maka $(R, \circ)$ adalah grup.

LATIHAN

- 1) Buat tabel Cayley operasi komposisi pada himpunan $C = [\mu_t, I]$ dimana I adalah transformasi identitas dan μ_t adalh pencerminan terhadap garis t !
- 2) Diketahui T adalah himpunan semua pencerminan terhadap garis tertentu dan $\circ$ adalah operasi komposisi. Apakah $(T, \circ)$ grup? Berikan komentar!
- 3) Misal $\rho_{A,\varphi}$ adalah rotasi dengan pusat A dan besar sudut rotasi φ dan μ_s adalah pencerminan terhadap garis s . Apabila $Q = [\rho_{A,\varphi}, \mu_s]$ dan $\circ$ adalah operasi komposisi. Apakah $(Q, \circ)$ merupakan grup?
- 4) Diberikan μ_s dan μ_t berturut-turut adalah pencerminan terhadap garis s dan garis t .

Apakah komposisi kedua pencerminan tersebut bersifat tertutup? Tentukan hasil komposisi tersebut!

- 5) Diberikan $\rho_{A,\varphi}$ adalah rotasi dengan pusat A dan sudut rotasinya φ_I , dan $\gamma = \gamma_{BC} \circ \mu_t$ adalah refleksi geser. Apakah $\rho_{A,\varphi} \circ \gamma$ bersifat tertutup? Tentukan hasil komposisinya!

Rangkuman

1. Himpunan transformasi-transformasi dengan operasi membentuk grup.
2. Himpunan $S = \{\text{pencerminan, translasi, rotasi, refleksi geser}\}$ dengan operasi komposisi membentuk grup.
3. Himpunan-himpunan yang merupakan sub grup dari grup isometri S diantaranya adalah:
 - a. $T = \{\gamma_{nAB} \mid n \text{ bilangan bulat}\}$
 - b. $C = \{\mu_t, I\}$
 - c. $R = \{\rho_{A,\varphi} \mid -180^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ\}$

Tes Formatif Modul 6

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

- 1) Jika γ refleksi geser, $\gamma(P) = Q$ dan $P \neq Q$, maka sumbu refleksi geser γ melalui

 - A. P
 - B. Q
 - C. P dan Q
 - D. Titik tengah $\overline{PQ}$

- 2) Jika r, s, dan t tiga buah garis yang ketiganya tidak melalui satu titik dan tidak sekaligus ketiganya sejajar, maka $\mu_r \circ \mu_s \circ \mu_t$ adalah

 - A. Translasi
 - B. Rotasi
 - C. Pencerminan
 - D. Refleksi geser

- 3) Jika refleksi geser $\gamma = \gamma_{AB} \circ \mu_t$ dengan $\gamma((4,2)) = (8,4)$, maka garis t melalui titik P dengan koordinat

 - A. (4,2)
 - B. (8,4)
 - C. (6,3)

D. (16,8)

4) Jika $A(0,0)$, $B(4,2)$ dan refleksi geser

$\gamma = \gamma_{AB} \circ \mu_t$, maka gradien garis t adalah

A. $\frac{1}{2}$

B. 2

C. -2

D. $-\frac{1}{2}$

5) Diberikan titik $A(4,5)$, $B(2,3)$, garis t melalui titik

$P(-2,1)$, dan $\gamma = \gamma_{AB} \circ \mu_t$ merupakan refleksi geser dengan sumbu garis t , maka persamaan t adalah ...

A. $y + x - 3 = 0$

B. $y - x - 3 = 0$

C. $-y - x - 3 = 0$

D. $y + x + 3 = 0$

6) Himpunan isometri berikut yang tertutup terhadap operasi komposisi adalah

A. Himpunan pencerminan

B. Himpunan translasi

C. Himpunan rotasi

D. Himpunan refleksi geser

- 7) Operasi komposisi tertutup pada himpunan G , jika G
- {rotasi-rotasi}
 - {isometri-isometri}
 - {refleksi geser, pencerminan}
 - {rotasi, translasi}
- 8) Komposisi dua pencerminan μ_s dengan μ_t adalah
- Translasi, jika s sejajar dengan t
 - Rotasi, jika s tidak sejajar dengan t
 - I, jika $s = t$
 - A, B, dan C semua benar
- 9) Komposisi antara rotasi $\rho_{A,\varphi}$ dengan $\rho_{A,\varphi}$ merupakan suatu translasi, jika
- $\varphi = \alpha$
 - $\varphi + \alpha = 0$
 - $\varphi + \alpha \neq 0$
 - $A = B$
- 10) Jika $T = \{(\gamma_{nAB} \mid n \text{ bilangan bulat})\}$ dan $\circ$ adalah operasi komposisi, maka
- $(T, \circ)$ grup
 - $(\gamma, \circ)$ grup
 - $(\gamma_{nAB}, \circ)$ grup
 - $(n, \circ)$ grup

Modul 7

Teorema Dasar Isometri

Kegiatan Belajar 1 : Teorema Ketunggalan dan Teorema Dasar Isometri

A. Teorema Ketunggalan Isometri

Teorema 7.1 (Teorema Ketunggalan Isometri):

Diketahui tiga titik A, B, dan C yang tak segaris dan titik-titik A', B', dan C'. Ada paling banyak satu isometri yang memetakan A ke A', B ke B', dan C ke C'.

Teorema 7.2:

Jika s adalah garis yang melalui titik asal dan pencerminan μ_s memetakan titik $A(1,0)$ ke titik $B(h,k)$, maka $\mu_s(x,y) = (hx + ky, kx - hy)$ untuk setiap $(x,y) \in V$.

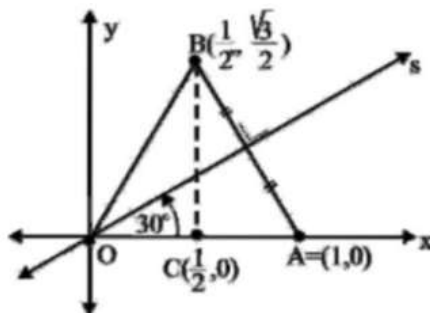
Contoh 7.1:

Jika $O(0,0)$ dan $P(x,y)$, tentukan rumus peta P terhadap rotasi $\rho_{0,60^\circ}$!

Penyelesaian:

Misal garis s melalui $O(0,0)$ dan menyudut 30° dengan sumbu s , titik $A(1,0)$, dan peta A oleh μ_s adalah B atau $\mu_s(A) = B$. Untuk menentukan koordinasi B, perhatikan segitiga OCB yang siku-siku di C dengan $m\angle BOC = 60^\circ$. Pada segitiga OCB tersebut, $OC = \frac{1}{2}$, $OB = 1$. Maka $BC = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. (dengan

rumus Pythagoras). Dengan demikian koordinasi $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.



Gambar 7.1

Jika $P(x, y)$ maka dengan menggunakan Teorema 7.2 kita peroleh:

$$\mu_s(P) = \mu_s(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}y \quad \frac{1}{2}\sqrt{3}x - \frac{1}{2}y \right).$$

Tetapi jika t adalah sumbu- x maka $\rho_{O, 60^\circ} = \mu_s \mu_t$. Oleh karena itu, kita peroleh:

$$\rho_{O, 60^\circ}(P) = \mu_s \mu_t(P) = \mu_s[\mu_t(x, y)] = \mu_s(x, y) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}y \quad \frac{1}{2}\sqrt{3}x + \frac{1}{2}y \right)$$

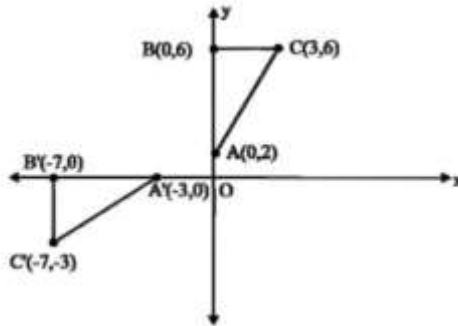
Contoh 7.2:

Diketahui $A(0,2), B(0,6), C(3,6), A'(-3,0), B'(-7,0)$, dan $C'(-7,-3)$. S adalah sebuah isometri yang memetakan $\triangle ABC$ ke $\triangle A'B'C'$. Jika $C'(-7,-3)$ adalah sebarang titik di bidang, maka tentukan $S(P)$!

Penyelesaian:

Bila $\triangle ABC$ dan $\triangle A'B'C'$ dibuat gambarnya, maka akan seperti gambar dibawah ini. Dari $\triangle ABC$ tersebut

kita dapat memperoleh $\triangle A'B'C'$ dengan cara mentransformasikan berturut-turut, yaitu



Gambar 7.2

Dengan translasi γ_{AO} , rotasi ρ_{90° , translasi γ_{AO} , dan refleksi μ_x .

Jadi, isometri $S = \mu_x \gamma_{AO} \rho_{90^\circ} \gamma_{AO}$. Titik $P(x, y)$ diambil sebarang, maka:

$$S(P) = S(x, y) = \mu_x \gamma_{AO} \rho_{90^\circ} [\gamma_{AO}(x, y)] = \mu_x \gamma_{AO} \rho_{90^\circ} [(x + 0, y - 2)]$$

$$= \mu_x \gamma_{AO} [\rho_{90^\circ}(x, y - 2)] = \mu_x (\gamma_{AO}(-y + 2, x))$$

$$= \mu_x [(-y + 2 - 3, x + 0)] = \mu_x [(-y - 1, -x)] = (-y - 1, -x)$$

Jadi, $S(P) = S(x, y) = (-y - 1, -x)$.

B. Teorema Dasar Isometri

Lemma 7.1:

Jika $AB \cong CD$, maka ada dua isometri yang memetakan A ke C dan B ke D, yaitu yang satu (.....) dan satu lagi isometri lawan.

Teorema 7.3 (Teorema Ketunggalan Isometri):

Setiap (.....) adalah komposisi paling banyak tiga refleksi (pencerminan).

Teorema 7.4 (Teorema Akibat):

Setiap (.....) adalah sebuah refleksi, refleksi geser translasi, atau rotasi.

Teorema 7.5:

Jika $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, maka ada tepat satu isometri T yang memetakan A ke A' , B ke B' , dan C ke C' ,

Definisi 7.1:

Dua buah himpunan disebut (.....) jika dan hanya jika ada sebuah isometri yang memetakan suatu himpunan ke himpunan lainnya.

Contoh 7.3:

Diketahui $T = \mu_t \mu_t \gamma_{AB} \rho_{C,\varphi} \mu_s$ dan T tidak mempunyai titik invarian. Isometri apakah T ?

Penyelesaian:

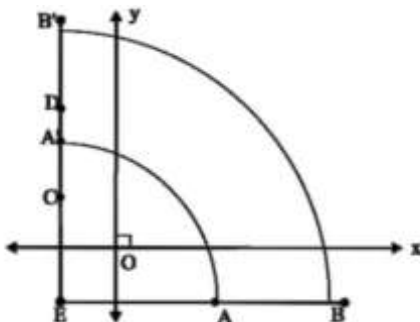
μ_s isometri lawan, $\rho_{C,\varphi}$ isometri langsung, γ_{AB} isometri langsung, μ_t isometri lawan, dan μ_t isometri lawan. Jadi, T merupakan isometri lawan. Karena T tidak mempunyai invarian, maka T adalah refleksi geser, sebab isometri lawan itu kemungkinannya refleksi dan refleksi geser. Karena refleksi mempunyai titik invarian yang banyak sekali, yaitu garis sumbu refleksinya, maka T tidak mungkin berupa refleksi.

Contoh 7.4:

Diketahui titik $A(3,-2)$, $B(6,-2)$, $C(-2,1)$, dan $D(-2,4)$. Tentukan isometri langsung T , apabila $T(A) = C$ dan $T(B) = D$.

Penyelesaian:

Bila kita buat gambarannya dalam sistem koordinat kartesius, maka titik-titik di atas seperti pada Gambar 7.3. T yang diminta adalah isometri langsung, maka kemungkinan dari T adalah translasi atau rotasi atau merupakan komposisi dua isometri lawan. Bila komposisinya lebih dari dua isometri, maka kemungkinannya sangat banyak. Kedudukan ruas garis $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ boleh dikatakan istimewa, sebab sejajar sumbu-sumbu koordinat. Apabila $\overline{AB}$ dirotasikan sejauh 90° dengan pusat $E(-2,-2)$,



maka

Gambar 7.3

titik $A(3,-2)$ akan menjadi titik $A'(-2,3)$, dan titik $B(6,-2)$ akan menjadi titik $B'(-2,6)$.

Agar titik A' berimpit dengan C , maka kita translasikan ruas garis $\overline{A'B'}$ dengan $\gamma_{A'C}$. Sehingga $T = \gamma_{A'C} \rho_{E,90^\circ}$

. Kita tahu bahwa $\rho_{E,90^\circ}$ adalah isometri langsung dan

$\gamma_{A'C}$ juga isometri langsung. Jadi, $T = \gamma_{A'C} \rho_{E,90^\circ}$ adalah isometri yang diminta.

Kita periksa, apakah benar $T(A) = C$ dan $T(B) = D$?

$$\begin{aligned} T(A) &= (\gamma_{A'C} \rho_{E,90^\circ})(3, -2) \\ &= \gamma_{A'C} [\rho_{E,90^\circ}(3, -2)] = \gamma_{A'C} \left[\begin{pmatrix} \cos 90 & -\sin 90 \\ \sin 90 & \cos 90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3+2 \\ -2+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \gamma_{A'C} \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right] = \gamma_{A'C} [(-2, 3)] = ((-2+2) - 2 \cdot (1-3) + 3) = (-2, 1) = C \end{aligned}$$

Jadi, $T(A) = C$

Anda diminta untuk memeriksa bahwa $T(B) = D$.

(petunjuk: lakukan dengan cara yang sama, seperti memeriksa $T(A) = C$, tetapi titik A diganti oleh titik B).

Latihan

- 1) Apakah $\mu_s, \mu_t, \mu_v, \mu_y, \mu_w$ merupakan isometri? Bila benar, apakah merupakan isometri langsung atau lawan?
- 2) Diberikan ruas garis AB ditransformasikan dengan T , sehingga $T(A) = A'$ dan $T(B) = B'$. Apabila $AB = A'B'$, maka apakah T adalah satu-satunya isometri?
- 3) Misalkan diketahui titik A dan B sehingga $T(A) = B$ dengan T isometri. Isometri apakah T ?

- 4) Menurut teorema ketunggalan isometri apabila $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, maka ada tepat sebuah isometri T sehingga $T(\triangle ABC) \cong \triangle A'B'C'$. Apakah ada isometri T , apabila $\triangle ABC$ tidak kuivalen dengan $\triangle A'B'C'$?
- 5) Jika S adalah garis yang melalui $O(0,0)$ dan $\mu_s(1,0) = (4,-2)$, maka tentukan $\mu_s(3,-2)$!

Rangkuman

1. Jika diberikan tiga titik A, B, dan C yang tidak segaris dan titik-titik A', B', dan C', maka ada paling banyak satu isometri yang memetakan A ke A', B ke B', dan C ke C'.
2. Jika s adalah garis yang melalui titik asal dan pencerminan μ_s memetakan titik $A(1,0)$ ke $B(h,k)$, maka $\mu_s(x,y) = (hx + ky, kx - hy)$ untuk setiap (x,y) .
3. Jika $AB \cong CD$, maka ada isometri yang memetakan A ke C dan B ke D, yaitu yang satu isometri langsung dan satu lagi isometri lawan.
4. Setiap isometri adalah komposisi paling banyak tiga refleksi (pencerminan).
5. Setiap isometri adalah sebuah refleksi, refleksi geser, translasi, atau rotasi.
6. Jika $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, maka ada tepat satu isometri T yang memetakan A ke A', B ke B', dan C ke C'.
7. Dua buah himpunan disebut kongruen jika dan hanya jika ada sebuah isometri yang memetakan satu himpunan ke himpunan lainnya.

Kegiatan Belajar 2 : Kesamaan (Parity) dan Persamaan Isometri

A. Kesamaan (Parity)

Lemma 7.2:

Jika P adalah sebuah titik, a dan b adalah garis, maka ada garis c dan d, dengan c melalui P sehingga

$$\mu_b \mu_a = \mu_d \mu_c.$$

Teorema 7.6:

Komposisi empat buah pencerminan sama dengan komposisi dua buah pencerminan.

Teorema 7.7:

Sebuah (.....) dapat dinyatakan sebagai komposisi dua buah refleksi. (.....) dapat dinyatakan sebagai sebuah refleksi atau komposisi tiga buah refleksi. Tak ada isometri yang bisa langsung dan lawan sekaligus.

Teorema 7.8:

Jika P sebuah titik, g adalah garis, dan T adalah (.....), maka :

$$a) \quad T\mu_g T^{-1} = \mu_{T(g)}$$

$$b) \quad T\sigma_{Pg} T^{-1} = \mu_{T(P)}$$

Teorema 7.9:

Jika T adalah isometri, γ_{AB} translasi, $\rho_{C,\varphi}$ rotasi, dan γ refleksi geser dengan sumbu garis k, maka:

$$a) \quad T\gamma_{AB} T^{-1} = \gamma_{T(A)T(B)}$$

b) $T\rho_{C,\varphi}T^{-1} = \rho_{T(C),t\varphi}$, (φ jika T isometri langsung dan $-\varphi$ jika T isometri lawan).

c) $T\gamma T^{-1}$ adalah refleksi geser dengan sumbu $T(k)$

Teorema 7.10:

a) Jika $\mu_s = \mu_t$, maka $s = t$

b) Jika $\rho_{C,\varphi} = \rho_{D,\varphi}$, maka $C = D$

Teorema 7.11:

$\mu_s\mu_t = \mu_t\mu_s$, jika dan hanya jika $s = t$ atau s tegak lurus terhadap t .

Berdasarkan teorema 7.11, pernyataan-pernyataan berikut adalah ekuivalen:

1. $\mu_s\mu_t = \mu_t\mu_s$

2. $\mu_s\mu_t\mu_s^{-1} = \mu_t$

3. $\mu_{\mu_s(t)} = \mu_t$

4. $\mu_s(t) = t$

5. $s = t$ atau s tegak lurus terhadap t .

Teorema 7.12:

Komposisi dua buah (.....) yang bukan identitas dengan pusat-pusat berbeda tidak komutatif.

Contoh 7.5:

Jika T isometri, buktikan bahwa $T\mu_s T^{-1}$ adalah isometri lawan.

Penyelesaian:

Karena T isometri, maka (menurut teorema) T dapat berupa isometri lawan atau isometri langsung. Jika T isometri lawan, maka T^{-1} juga isometri lawan.

Karena μ_s adalah isometri lawan, maka $T\mu_s T^{-1}$ merupakan isometri lawan.

Jika T isometri langsung, maka T^{-1} juga isometri langsung. Karena μ_s isometri lawan, maka $T\mu_s T^{-1}$ merupakan isometri lawan. Jadi $T\mu_s T^{-1}$ merupakan isometri lawan

Contoh 7.6:

Buktikan bahwa titik invariant dari $\mu_t \rho_{C,\varphi} \mu_t^{-1}$ adalah $\mu_t(C)$

Penyelesaian:

Harus ditunjukkan bahwa $(\mu_t \rho_{C,\varphi} \mu_t^{-1})(\mu_t(C)) = \mu_t(C)$. Dengan menggunakan teorema-teorema yang telah dipelajari di atas, maka:

$$\begin{aligned} (\mu_t \rho_{C,\varphi} \mu_t^{-1})(\mu_t(C)) &= \mu_t \rho_{C,\varphi} [\mu_t^{-1} \mu_t(C)] \\ &= \mu_t \rho_{C,\varphi}(C) \\ &= \mu_t(C), \text{ karena } \rho_{C,\varphi}(C) = (C) \end{aligned}$$

Contoh 7.7:

Jika T isometri dan B adalah involusi, maka TBT^{-1} adalah involusi. Buktikan!

Penyelesaian:

Menurut definisi jika B involusi, maka $B = B^{-1}$. Jadi, untuk menunjukkan bahwa TBT^{-1} involusi, maka

kita perhatikan $(TBT^{-1})^{-1} = TBT^{-1}$. Dengan menggunakan teorema-teorema yang telah dipelajari di atas, maka

$(TBT^{-1})^{-1} = ((TB)T^{-1})^{-1} = (T^{-1})^{-1}(TB)^{-1} = TB^{-1}T^{-1} = TBT^{-1}$.
Jadi, TBT^{-1} adalah involusi.

B. Persamaan Isometri

Karena refleksi geser merupakan isometri, maka persamaan refleksi geser dapat diturunkan dari komposisi pencerminan dilanjutkan dengan translasi dan komposisi yang lainnya, sesuai dengan ketentuan isometri tersebut. Jadi, untuk memperoleh persamaan refleksi geser kita lakukan dengan cara mensubstitusi persamaan-persamaan translasi. Untuk menurunkan persamaan-persamaan refleksi geser tersebut, sebaiknya kita ingat kembali mengenai rumus-rumus persamaan pencerminan, setengah putaran, translasi, dan rotasi, yaitu:

1. Pencerminan

Misal titik $P(x, y)$ adalah sebarang titik di bidang dan garis s mempunyai persamaan $s = \{(x, y) \mid ax + by + c = 0\}$. Jika, $\mu_s(P) = P'$ dengan $P'(x', y')$, maka:

$$x' = x - \frac{2a(ax + by + c)}{a^2 + b^2} \text{ dan}$$

$$y' = y - \frac{2b(ax + by + c)}{a^2 + b^2}$$

2. Translasi

Misal translasi γ_{AB} dengan $A(0,0), B(a,b)$ dan $P(x,y)$ adalah titik sebarang di bidang. Jika $\gamma_{AB}(P) = P'$ dengan $P'(x',y')$, maka $x' = x + a$ dan $y' = y + b$. Sementara itu, jika TBT^{-1} dan TBT^{-1} , serta γ_{AB} dengan $P'(x',y')$, maka $x' = x + (p - a)$ dan $y' = y + (q - b)$.

3. Setengah Putaran

Setengah putaran dengan pusat $A(a,b)$ untuk titik $P(x,y)$ adalah $o_A(P) = P'(x',y')$ engan $x' = 2a - x$ dan $y' = 2b - y$.

4. Rotasi

Rotasi yang pusatnya $A(0,0)$ dengan sudut φ dari titik $P(x,y)$ adalah $\rho_{A,\varphi}(P) = P'(x',y')$ dengan

$$x' = x \cdot \cos \varphi - y \quad \text{dan}$$

$$y' = x \cdot \sin \varphi + y \cdot \cos \varphi.$$

Sementara itu, jika pusatnya $A(a,b)$, maka

$$y' = a + (x - a) \cdot \cos \varphi - (y - b) \cdot \sin \varphi \quad \text{dan}$$

$$y' = b + (x - a) \cdot \sin \varphi + (y - b) \cdot \cos \varphi.$$

5. Refleksi Geser

Kita ambil komposisi menurut definisi refleksi geser itu, yaitu jika γ refleksi geser dan $t \parallel \overrightarrow{AB}$,

maka $\gamma = \gamma_{AB} \mu_t$ dengan t adalah

(.....). Misal persamaan sumbu refleksi geser tersebut adalah

$t = \{(x, y) \mid ax + by + c = 0\}$, titik $A(0,0)$ dan

$B(p, q)$. Bila $P' = (x', y')$ adalah peta titik

$P = (x, y)$ oleh γ atau $\gamma(P) = P'$, maka untuk menentukan x' dan y' , kita substitusikan

persamaan pencerminan μ_t ke persamaan

translasi γ_{AB} . Kita tahu bahwa

$$\mu_t(P) = P^0(x^0 + y^0) \text{ dengan}$$

$$x^0 = x - \frac{2a(ax + by + c)}{a^2 + b^2} \text{ dan}$$

$$y^0 = y - \frac{2b(ax + by + c)}{a^2 + b^2}. \text{ Karena}$$

$$\gamma = \gamma_{AB}(P^0) = \gamma_{AB}[\mu_t(P)] = P', \text{ maka}$$

$x' = x^0 + p$ dan $y' = y^0 + q$. Setelah x'' dan y'' disubstitusikan, maka kita peroleh:

$$x' = x - \frac{2a(ax + by + c)}{a^2 + b^2} \text{ dan}$$

$$y' = y - \frac{2b(ax + by + c)}{a^2 + b^2}$$

Apabila $A(t, u)$ dan $B(p, q)$, maka

$$\gamma = \gamma_{AB}(P^0) = P' \text{ dengan } x' = x^0 + (p - t) \text{ dan}$$

$y' = y^0 + (q - u)$. Setelah x'' dan y'' disubstitusikan maka kita peroleh:

$$x' = x - \frac{2a(ax + by + c)}{a^2 + b^2} + (p - t) \text{ dan}$$

$$y' = y - \frac{2b(ax + by + c)}{a^2 + b^2} + (q - u)$$

Karena isometri itu dapat dikelompokkan juga menjadi dua macam, yaitu (.....) dan (.....), maka persamaan kedua jenis isometri tersebut sebagai berikut:

A. Persamaan Isometri Langsung

Jika T isometri langsung, $P(x, y)$ sebarang titik di bidang, dan $T(P) = P'$ dengan $P' = (x', y')$, maka: $x' = ax - by + c$ dan $y' = bx + ay + d$ dengan $a^2 + b^2 = 1$.

Persamaan isometri di atas dapat pula ditulis sebagai berikut:

$$x' = ax - by + c$$

$$y' = bx + ay + d$$

$$1 = 0x + 0y + 1$$

$$\text{dengan } a^2 + b^2 = 1$$

$$\text{Atau } \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b & c \\ b & a & d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dengan } a^2 + b^2 = 1$$

$$\text{. Matriks } T = \begin{bmatrix} a & -b & c \\ b & a & d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dengan } a^2 + b^2 = 1,$$

disebut (.....). Karena isometri

langsung tersebut ada dua jenis, yaitu translasi dan rotasi, maka matriks T di atas merupakan matriks translasi dan rotasi.

B. Persamaan Isomer Lawan

Jika T isometri lawan, $P(x, y)$ sebarang titik di bidang, dan $T(P) = P'$ dengan $P' = (x', y')$, maka: $x' = ax - by + c$ dan $y' = -(bx + ay + d)$ dengan $a^2 + b^2 = 1$.

Persamaan isometri di atas dapat pula ditulis sebagai berikut:

$$x' = ax - by + c$$

$$y' = -bx - ay - d$$

$$1 = 0x + 0y + 1$$

dengan $a^2 + b^2 = 1$

$$\text{Atau} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b & c \\ -b & -a & -d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{dengan}$$

$$a^2 + b^2 = 1. \text{ Matriks } T = \begin{bmatrix} a & -b & c \\ -b & -a & -d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dengan}$$

$a^2 + b^2 = 1$, disebut (.....). Karena isometri lawan tersebut ada dua jenis, yaitu refleksi dan refleksi geser, maka matriks T di atas merupakan matriks refleksi dan refleksi geser. Hal ini tak mudah untuk diperlihatkan apabila sumbu-sumbu refleksinya tidak istimewa, karena refleksi terhadap garis sebarang merupakan komposisi beberapa buah isometri. Khusus untuk refleksi terhadap beberapa garis istimewa kita diminta

mencoba menunjukkannya. Misalnya refleksi terhadap sumbu x , terhadap sumbu y , terhadap garis $x = k$, terhadap garis $y = h$, terhadap garis $y = x$, dan terhadap garis $y = -x$

Teorema 7.13:

Jika $P(x, y)$, T adalah isometri sehingga $T(P) = P'$ dengan $P'(x', y')$, maka $x' = ax - by + c$ dan $y' = \pm(bx + ay + d)$, dengan $a^2 + b^2 = 1$

Contoh 7.8:

Tentukan peta titik $P(2, -1)$ oleh isometri T yang

matriks isometrinya adalah
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} !$$

Penyelesaian

Missal pet dari P adalah Q , maka $T(P) = Q$, sehingga:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, peta dari P adalah $Q(4, 2)$

Contoh 7.9:

Tentukan prapeta titik $Q(4, -3)$ oleh T yang

matriksnya
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} !$$

Penyelesaian

Misal P adalah prapeta titik Q oleh T , maka

$$T(P) = Q \text{ atau } P = T^{-1}(Q)$$

Bila T^{-1} dihitung, maka akan diperoleh

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{Maka dari itu}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \text{Jadi, koordinat}$$

$$P(0, -2).$$

Contoh 7.10:

Tentukan peta $s = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0\}$

$$\text{oleh isometri } T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian

Missal $P(x, y)$ pada s dan peta P oleh T adalah $Q(x', y')$, maka $Q = T(P)$, sehingga

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2 \\ y+3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan diatas kita peroleh $x' = x+2$ dan $y' = y+3$ atau $x = x'-2$ dan $y = y'-3$. Bila harga x

dan y ini kita substitusikan ke persamaan s, maka kita peroleh $(x'-2)^2 + (y'-3)^2 + 4(x'-2) + 6(y'-3) + 9 = 0$. Apabila persamaan ini disederhanakan akan kita peroleh $(x')^2 + (y')^2 = 4$. Apabila digambar pada bidang Cartesius tegak berupa lingkaran. Kita diminta untuk menentukan koordinat pusat dan panjang jari-jari lingkaran tersebut.

Latihan

- 1) Jika μ_n, μ_m dan μ_k berturut-turut pencerminan terhadap garis n, m, dan k. Apakah mungkin menjadi $\mu_n \mu_m = \mu_k$? Tunjukkan kebenaran jawaban anda!
- 2) Jika α involusi dan β adalah transformasi, buktikan bahwa $\beta \alpha \beta^{-1}$ suatu involusi!
- 3) Jika P sebuah titik dan μ_g adalah pencerminan terhadap garis g, buktikan $\mu_g \sigma_P \mu_g^{-1} = \sigma_{\mu_g(P)}$!
- 4) Buktikan: $\mu_s \mu_t \mu_s^{-1} = \mu_t$, jika dan hanya jika $\mu_{\mu_s(t)} = \mu_t$!
- 5) Tentukan isometri lain dari:
 - a) $\sigma_C \gamma_{AB} \sigma_C$
 - b) $\rho_{A,\varphi} \mu_g \rho_{A,\varphi}$
 - c) $\mu_t \rho_{A,\varphi} \mu_t$
 - d) $\gamma_{AB} \sigma_P \gamma_{AB}$

Rangkuman

1. Komposisi empat buah pencerminan sama dengan komposisi dua buah pencerminan.
2. Jika P sebuah titik, g adalah garis, dan T adalah isometri, maka:
 - a. $T\mu_g T^{-1} = \mu_{T(g)}$
 - b. $T\sigma_P T^{-1} = \sigma_{T(P)}$
3. Jika T isometri, γ_{AB} translasi, $\rho_{C,\varphi}$ rotasi dan γ refleksi geser dengan sumbu k, maka:
 - a. $T\gamma_{AB} T^{-1} = \gamma_{T(A)T(B)}$
 - b. $T\rho_{C,\varphi} T^{-1} = \rho_{T(C),\pm\varphi}$ (φ jika T isometri langsung dan $-\varphi$ jika T isometri lawan)
 - c. $T\gamma T^{-1}$ adalah refleksi geser dengan sumbu $T(k)$
4. Jika $\mu_s = \mu_t$, maka $s = t$. Dan jika $\rho_{C,\varphi} = \rho_{C,\varphi}$, maka $C = D$.
5. $\mu_s \mu_t = \mu_s \mu_t$ jika dan hanya jika $s = t$ atau s tegak lurus dengan t.
6. Pernyataan-pernyataan berikut adalah ekuivalen:
 - a. $\mu_t \mu_s = \mu_s \mu_t$
 - b. $\mu_s \mu_t \mu_s^{-1} = \mu_t$
 - c. $\mu_{\mu_s(t)} = \mu_t$
 - d. $\mu_s(t) = t$

- e. $S = t$ atau s tegak lurus dengan t .
7. Komposisi dua buah rotasi yang bukan identitas dengan pusat-pusat berbeda tidak komutatif.
8. Jika $P(x, y)$, T adalah isometri sehingga $T(P) = P'$ dengan $P'(x', y')$, maka $x' = ax - by + c$ dan $y' = \pm(bx + ay + d)$, dengan $a^2 + b^2 = 1$.

Tes Formatif Modul 7

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

- 1) Diketahui $T(A) = A'$, $T(B) = B'$, dan $AB = A'B'$, maka T adalah

 - A. Kesebangunan
 - B. Translasi
 - C. Dilatasi
 - D. isometri

- 2) Jika pencerminan μ_s memetakan titik $(1,0)$ ke titik (a,b) , maka μ_s

 - A. $(ax + by, bx - ay)$
 - B. $(bp - aq, ap + bq)$
 - C. $(ap - bq, bp + aq)$
 - D. $(ap + bq, bp - aq)$

- 3) Jika $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ dengan $T(A) = C$ dan $T(B) = D$, maka

 - A. T bukan isometri
 - B. T isometri langsung.
 - C. T isometri lawan
 - D. T isometri langsung atau lawan

- 4) Misal isometri $T = \mu_s \mu_t \mu_v \mu_r \mu_w$, maka T merupakan
- Rotasi
 - Translasi
 - Pencerminan atau refleksi geser
 - Rotasi atau translasi
- 5) Misal isometri $R = \gamma_{AB} \mu_u \rho_{A,\varphi} \gamma_{CD} \mu_t$, maka R merupakan
- Rotasi
 - Translasi
 - Pencerminan atau refleksi geser
 - Rotasi atau translasi
- 6) T isometri dan $T\rho_{C,\varphi}T^{-1} = \rho_{T(C),\alpha}$. Jika T merupakan isometri langsung, maka $\alpha = \dots$
- φ
 - $-\varphi$
 - $90^\circ - \varphi$
 - $90^\circ + \varphi$
- 7) Jika T isometri dan γ adalah refleksi geser, maka $T\gamma T^{-1}$ merupakan
- Pencerminan.
 - Translasi.
 - Rotasi.
 - Refleksi geser.

8) Diketahui pernyataan:

(1) $\mu_t \mu_s = \mu_s \mu_t$

(2) $\mu_{\mu_s(t)} = \mu_t$

(3) $\mu_s(t) = t$, dan

(4) $s = t$ atau s tegak lurus dengan t.

Pernyataan yang benar adalah

A. (1) ekuivalen (2)

B. (1) ekuivalen (3)

C. (1) ekuivalen (4)

D. A, B, dan C semua benar

9) Jika T isometri, maka γ_{AB} merupakan isometri

A. Langsung

B. Lawan

C. Tidak langsung, tidak lawan

D. Dapat langsung, dapat lawan

10) Titik invariant dari $\mu_t \rho_{C,\varphi} \mu_t^{-1}$ adalah

A. $\mu_t(C)$

B. $\rho_{C,\varphi}$

C. $\mu_t(t)$

D. μ_t^{-1}

MODUL 8

Similaritas

Kegiatan Belajar 1 : Similaritas dan Dilatasi

A. Similaritas

Definisi 8.1

Transformasi T disebut (.....) jika dan hanya jika ada konstanta $k > 0$ sehingga untuk setiap titik P dan Q . $P'Q' = k(PQ)$ dengan $P' = T(P)$ dan $Q' = T(Q)$.

Teorema 8.1:

Jika T (.....), maka:

- 1) T memetakan garis pada garis.
- 2) T mengawetkan ukuran sudut.
- 3) T mengawetkan kesejajaran.

Teorema 8.2 (Teorema Akibat):

Kesebangunan mengawetkan ke tegak lurusan dua buah garis.

Teorema 8.3:

Jika T dan I adalah kesebangunan, maka TL adalah (.....).

B. Dilatasi

Definisi 8.2:

Diketahui, sebuah titik A dan bilangan positif r . Pemetaan yang berpusat A dengan faktor skala r

disebut (.....) (dinotasikan $D_{A,r}$) jika dan hanya jika untuk setiap titik P di v berlaku:

- Jika $P = A$, maka $D_{A,r}(P) = A$.
- Jika $P \neq A$, maka $D_{A,r}(P) = P'$ dengan P' adalah titik pada sinar $\overrightarrow{AP}$ sehingga $\overrightarrow{AP'} = r(\overrightarrow{AP})$. Pernyataan ini ekuivalen dengan P' , yaitu titik yang mengakibatkan $\overrightarrow{AP'} = r(\overrightarrow{AP})$.

Teorem 8.4:

Setiap dilatasi adalah (.....).

Teoema 8.5:

Jika s dan s' peta garis s oleh dilatasi $D_{A,r}$, maka:

- $s' = s$, jika $A \in s$, dan
- $s' \parallel s$, jika $A \notin s$.

Contoh 8.1:

Diketahui titik-titik A, P, dan Q yang tak segaris. Lukislah $D_{A,1/3}(Q)$!

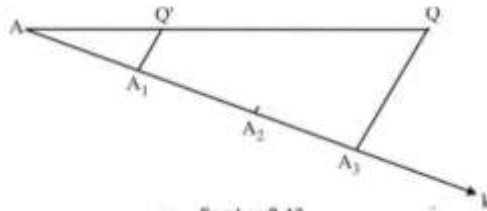
Penyelesaian:

Misalkan $D_{A,1/3}(Q) = Q'$ sehingga $AQ' = \frac{1}{3} AQ$.

Cara melukisnya:

- Buat $\overline{AQ}$ (panjang disesuaikan keperluan).
- Buat garis k melalui A tidak berimpit dengan $\overline{AQ}$

- 3) Pada garis k buat tiga buah titik dengan skala yang sama, yaitu A_1, A_2 dan A_3 .
- 4) Hubungkan A_3 dengan Q .
- 5) Buat $\overline{A_1Q'}$ sejajar dengan $\overline{A_3Q}$.



Gambar 8.1

Contoh 8.2:

Jika $O(0,0)$ dan $B(2,5)$, tentukan koordinat $B' = D_{O,3}(B)$!

Penyelesaian:

Menurut definisi dilatasi, bila $D_{O,3}(B) = B'$ maka $OB' = 3(OB)$. Karena $O(0,0), B(2,5)$, dan misalkan $B'(x', y')$, maka $OB' = 3(OB)$ atau $(x' - 0, y' - 0) = 3(2 - 0, 5 - 0)$ atau $(x', y') = 3(2, 5)$. Sehingga kita peroleh $x' = 6$ dan $y' = 15$. Jadi, koordinat $B'(6, 15)$.

C. Komposisi Dilatasi

Teorema 8.6:

Jika $D_{A,r}$ adalah sebuah (.....) dengan pusat $A(a, b)$ dan faktor skala r maka untuk $P(x, y)$ sebarang titik di bidang, berlaku $D_{A,r}(P) = ((rx + a(1-r), ry + b(1-r))$.

Teorema 8.7:

Komposisi dua dilatasi $D_{A,r}$ dan $D_{B,r}$ dengan $A \neq B$ adalah suatu dilatasi $D_{C,r}$ dengan C pada $\overleftrightarrow{AB}$ jika rs tidak sama dengan 1. Sementara itu, bila $rs=1$, komposisi dua dilatasi tersebut adalah suatu (.....) yang sejajar dengan $\overleftrightarrow{AB}$.

Teorema 8.8:

Jika $D_{A,r}$ dan $D_{A,s}$ adalah dua buah dilatasi dengan pusat yang sama, yaitu di A , maka:

a) $D_{A,r}D_{A,s} = D_{A,rs}$, jika $rs \neq 1$.

b) $D_{A,r}D_{A,s} = 1$, jika $rs=1$.

c) $D_{A,r}D_{A,s} = D_{A,s}D_{A,r}$

Teorema 8.9:

Untuk setiap dilatsi $D_{A,r}$ balikkannya adalah $D_{A,\frac{1}{r}}$.

Teorema 8.10:

Diketahui translasi γ_{AB} dan dilatasi-dilatasi $D_{A,2}$ dan $D_{B,\frac{1}{2}}$, maka $\gamma_{AB} = D_{A,2} D_{B,\frac{1}{2}}$.

Teorema 8.11:

a) $\gamma_{2AB} = D_{A,3} D_{B,\frac{1}{3}}$.

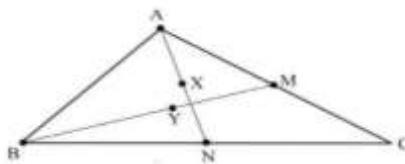
b) $\gamma_{nAB} = D_{A,n+1} D_{B,\frac{1}{n+1}}$ dengan n bilangan asli.

Teorema 8.12:

Komposisi sejumlah dilatsi dan isometri adalah kesebangunan.

Contoh 8.3:

Pada contoh ini kita akan diperlihatkan penggunaan dilatasi untuk membuktikan bahwa ketiga garis berat suatu segitiga berpotongan di satu titik.

Penyelesaian:

Gambar 8.2

Andaikan M adalah titik tengah $\overline{AC}$ dan N adalah titik tengah $\overline{BC}$. Misalnya, X titik pada $\overline{AN}$ sehingga $AX = 2(XN)$ dan Y pada $\overline{BM}$ sehingga $BY = 2(YM)$. Kita akan membuktikan bahwa $X = Y$. Berturut-turut diperoleh:

$$1) \quad X = D_{A, \frac{2}{3}}(N) \quad \text{dan} \quad N = D_{B, \frac{1}{2}}(C). \quad \text{Jadi,}$$

$$X = D_{A, \frac{2}{3}} D_{B, \frac{1}{2}}(C). \quad \text{Sementara itu,}$$

$$\left(D_{A, \frac{2}{3}} \right)^{-1} = D_{A, \frac{3}{2}} \quad \text{dan} \quad \left(D_{B, \frac{1}{2}} \right)^{-1} = D_{B, 2}. \quad \text{Maka,}$$

$$C = D_{B, 2} D_{A, \frac{2}{3}}(X).$$

$$2) \quad Y = D_{B, \frac{2}{3}}(M) \quad \text{dan} \quad M = D_{A, \frac{1}{2}}(C). \quad \text{Jadi,}$$

$$Y = D_{B, \frac{2}{3}} D_{A, \frac{1}{2}}(C). \quad \text{Sementara itu,}$$

$$C = D_{B, 2} D_{A, \frac{2}{3}}(X). \quad \text{Maka,}$$

$$C = D_{B, \frac{2}{3}} D_{A, \frac{1}{2}} D_{B, 2} D_{A, \frac{3}{2}}(X).$$

$$\text{Karena } D_{B, \frac{2}{3}} = D_{B, \frac{1}{3}} D_{B, 2} \quad \text{dan} \quad D_{B, \frac{3}{2}} = D_{B, \frac{1}{2}} D_{B, 3},$$

maka:

$$Y = (D_{B, \frac{1}{3}} D_{B, 2})(D_{A, \frac{2}{2}} D_{B, 2})(D_{A, \frac{1}{2}} D_{A, 3})(X)$$

$$\begin{aligned}
&= D_{B, \frac{1}{3}} (D_{B,2} D_{A, \frac{2}{2}}) (D_{B,2} D_{A, \frac{1}{2}}) D_{A,3} (X) \\
&= D_{B, \frac{1}{3}} \gamma_{BA} \gamma_{BA} D_{A,3} (X) \\
&= D_{B, \frac{1}{3}} \gamma_{2BA} D_{A,3} (X) \\
&= D_{B, \frac{1}{3}} (D_{B,3} D_{B, \frac{1}{3}}) D_{A,3} (X) \\
&= (D_{B, \frac{1}{3}} D_{B,3}) (D_{B, \frac{1}{3}} D_{A,3}) (X) \\
&= (I)(I)(X) = X
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, buktikan jika $Z \in \overline{CK}$ dengan K adalah titik tengah $\overline{AB}$ dan $CZ = \frac{2}{3}CK$ atau $CZ = 2ZK$ maka $Z = X$. Bila ini telah terbukti, dapat dibuat kesimpulan berikut. Karena $X \in \overline{AN}$, $Y \in \overline{BM}$, $Z \in \overline{CK}$, dan $X = Y = Z$, maka ketiga garis berat $\triangle ABC$ tersebut melalui satu titik.

LATIHAN

- 1) Jika T kesebangunan, sebutkan sifat-sifat dari T tersebut!
- 2) Jika $D_{A,r}$ adalah dilatasi yang pusatnya A dengan faktor skala r dan $D_{A,r}(P) = P$, apa yang dapat Anda katakan tentang titik P tersebut?
- 3) Diketahui $P(1,-3)$ dan $A(0,0)$, tentukan $D_{A,2}(P)$!

- 4) Diketahui $A(1,3)$ dan $P(x_0, y_0)$ adalah titik sebarang. Tentukan koordinat $P' = D_{A, \frac{3}{4}}(P)$!
- 5) Jika $s = \{(x, y) \mid 2x + y = 8\}$, tentukan persamaan $s' = D_{A, \frac{4}{3}}(s)$ dengan $A(1,3)$.

Rangkuman

1. Suatu transformasi T disebut kesebangunan jika dan hanya jika ada konstanta $k > 0$ sehingga setiap titik P dan Q , $P'Q' = k(PQ)$ dengan $P' = T(P)$ dan $Q' = T(Q)$.
2. Kesebangunan memetakan garis pada garis, mengawetkan ukuran sudut, mengawetkan kesejajaran dan mengawetkan ketegaklurusan.
3. Jika T dan L kesebangunan, maka TL kesebangunan.
4. Setiap dilatasi adalah kesebangunan.
5. Jika s garis dan s' peta garis s oleh dilatasi $D_{A,r}$, maka:
 - a. $s' = s$, jika $A \in s$.
 - b. $s' \parallel s$, jika $A \notin s$.
6. Jika $P(x, y)$ dan $O(0,0)$, maka $D_{O,r}(x, y) = (rx, ry)$.
7. Jika $P(x, y)$ dan $A(a, b)$, maka $D_{A,r}(x, y) = (rx + a(1-r), ry + b(1-r))$.
8. Jika $A \neq B$, maka:
 - a. $D_{A,r}D_{B,s} = D_{C,rs}$ dengan C pada $\overleftrightarrow{AB}$, jika $rs = 1$.

b. $D_{A,r}D_{B,s} = \gamma_{CD}$ dengan $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$, jika $rs \neq 1$

9. Jika $D_{A,r}$ dan $D_{A,s}$ adalah dua buah dilatasi dengan pusat yang sama, yaitu A, maka:

a. $D_{A,r}D_{B,s} = D_{C,rs}$, jika $rs \neq 1$.

b. $D_{A,r}D_{B,s} = 1$, jika $rs = 1$.

c. $D_{A,r}D_{B,s} = D_{B,s}D_{A,r}$.

10. $(D_{A,r})^{-1} = D_{A,\frac{1}{r}}$.

11. $\gamma_{nAB} = D_{A,n+1}D_{A,\frac{1}{n+1}}$.

12. Komposisi sejumlah dilatasi dan isometri adalah kesebangunan.

Kegiatan belajar 2 : Teorema Similaritas dan Persamaan Similaritas

A. Teorema Similaritas (Kesebangunan).

Teorema 8.13 (Teorema Kesebangunan):

Jika $\triangle ABC \approx \triangle XYZ$, maka ada tepat satu (.....) T , sehingga $T(A) = X, T(B) = Y$, dan $T(C) = Z$.

Teorema 8.14:

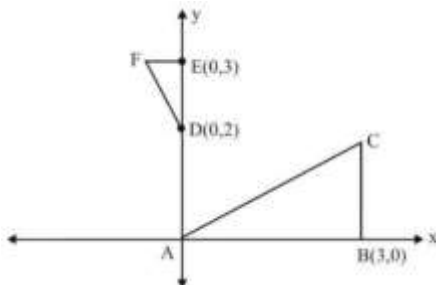
Setiap (.....) dapat dinyatakan sebagai komposisi antara dilatasi dan paling banyak tiga buah pencerminan (sebuah isometri).

Definisi 8.3:

Dua himpunan A dan B disebut (.....) dinotasikan $A \approx B$ jika dan hanya jika ada kesebangunan yang memetakan himpunan A ke himpunan B .

Contoh 8.4:

Jika T kesebangunan yang memetakan $\triangle ABC$ ke $\triangle DEF$, seperti pada gambar 8.23 dan $P(2,-2)$, tentukan koordinat $T(P)$!



Gambar 8.3

Penyelesaian:

Diketahui bahwa $T(\triangle ABC) \approx \triangle DEF$, seperti pada Gambar 8.23, artinya $T(A) = D, T(B) = E$, dan $T(C) = F$.

$$AB = (3-0)^2 + (0-0)^2 = 3 \quad \text{dan}$$

$$DE = (0-0)^2 + (3-2)^2 = 1. \quad \text{Karena } T$$

kesebangunan, maka $DE = k(AB)$ atau $k = \frac{1}{3}$.

Misalkan $T(P) = P'$ dengan $P'(x', y')$, ditentukan koordinat P' . Dari $T(A) = D$ dan $T(P) = P'$, maka:

$$DP' = k(AP)$$

$$\Leftrightarrow (x'-0, y'-2) = \frac{1}{3}(2-0, -2-0).$$

$$\Leftrightarrow (x', y'-2) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Jadi, kita peroleh $x' = \frac{2}{3}$ dan $y' = \frac{4}{3}$. Maka itu,

$$P' \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right).$$

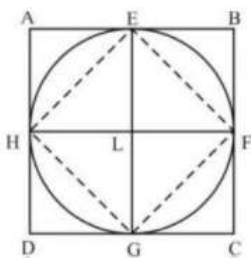
Contoh 8.5:

L adalah lingkaran dengan pusat L dan jari-jari 1 cm. bujur sangkar ABCD adalah bujur sangkar yang menyinggung lingkaran L dari luar. Sementara itu, bujur sangkar EFGH adalah bujur sangkar yang berada di dalam lingkaran L. Tentukan kesebangunan T yang memetakan bujur sangkar EFGH ke bujur sangkar ABCD sehingga $T(E) = A$ dan $T(F) = B$.

Penyelesaian:

Buatlah diagonal BD dan AC. Kedua diagonal ini berpotongan di titik L. Ruas garis LE merupakan jari-jari lingkaran L, sedangkan LA merupakan sisi miring segitiga siku-siku sama kaki LAE. Jadi, $LE = 1$ dan $LA = \sqrt{2}$, sehingga $\frac{LA}{LE} = \sqrt{2}$ atau $LA = \sqrt{2}LE$

Kita buat $D_{L\sqrt{2}} \cdot D_{L\sqrt{2}}(E) = E'$ sehingga



Gambar 8.4

$LE' = \sqrt{2}LE$. Dengan demikian $LE' = LA$. Begitu pula titik-titik sudut F, G, dan H bila didilatasikan dengan $D_{L\sqrt{2}}$ dan misal peta-petanya berturut-turut adalah F', G', dan H'. Maka itu, $LF' = LG' = LH' = LA' = LA$. Kita komposisikan $D_{L\sqrt{2}}$ dengan $\rho_{L,45}$, maka:

$$\rho_{L,45} D_{L\sqrt{2}}(E) = \rho_{L,45}(E') = A$$

$$\rho_{L,45} D_{L\sqrt{2}}(F) = \rho_{L,45}(F') = B$$

$$\rho_{L,45} D_{L\sqrt{2}}(G) = \rho_{L,45}(G') = C$$

$$\rho_{L,45} D_{L\sqrt{2}}(H) = \rho_{L,45}(H') = D$$

Dengan komposisi $\rho_{L,45}D_{L\sqrt{2}}$, ternyata bujur sangkar EFGH dipetakan ke bujur sangkar ABCD. Jadi, kesebangunan T yang dicari adalah $T = \rho_{L,45}D_{L\sqrt{2}}$.

B. Persamaan Similaritas

Teorema 8.15 (Teorema Persamaan Similaritas):

Misalkan S adalah (.....) di mana $S(P) = P'$ dengan $P(x, y)$ dan $P'(x', y')$, maka:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = px - qy - s \\ y' = \pm(qx + py + t) \end{array} \right\} \text{ dengan } p^2 + q^2 \neq 0.$$

Contoh 8.6:

Tentukan bayangan titik $P(1,2)$ oleh (.....)

$$\text{yang matriknya } S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}!$$

Penyelesaian:

Misalkan bayangan titik P adalah titik $P'(x', y')$. Ini berarti $S(P) = P'$. Koordinat P dan P' kita ubah menjadi koordinat homogen (masih ingatkah tentang koordinasi homogen?) sehingga $P(1,2)$ menjadi $P(1,2,1)$, sedangkan $P'(x', y')$ menjadi $P'(x', y', 1)$.

$$\text{Dari } S(P) = P', \text{ kita peroleh } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Setelah dijabarkan, kita peroleh $\begin{cases} x'=10 \\ y'=2 \end{cases}$. Jadi, bayangan titik $P(1,2)$ adalah $P'(10,2)$.

Latihan

1) Diketahui $D_{p,r}(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$ dan $D_{p,r}(A) = A' = A$. Buat sketsa $P(1,2)$ dan $P'(10,2)$!

2) Jika A, B, C, dan D empat titik berbeda, manakah yang tidak ada tiga titik yang segaris diantara empat titik tersebut. Tentukan syarat agar terdapat suatu dilatasi yang memetakan A ke B dan C ke D!

3) Jika S similaritas lawan dari $S((x, y)) = (x', y')$, tentukan x' dan y' !

4) Tentukan peta titik $P(5,4)$ oleh kesebangunan

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

yang matriksnya $M = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$!

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5) Tentukan peta garis $s = \{(x, y) \mid 2x + 3y + 6 = 0\}$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oleh kesebangunan yang matriksnya $M = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$!

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rangkuman

1. Jika $\triangle ABC \approx \triangle XYZ$, ada tepat satu kesebangunan T sehingga $T(A) = X, T(B) = Y$, dan $T(C) = Z$.
2. Setiap kesebangunan dapat dinyatakan sebagai komposisi antara dilatasi dan sebuah isometri.
3. Dua himpunan A dan B disebut sebangun, lalu dinotasikan $A \approx B$ jika dan hanya jika ada kesebangunan yang memetakan himpunan A ke himpunan B .
4. Misalkan S adalah similaritas (kesebangunan) di mana $S(P) = P'$ dengan $P(x, y)$ dan $P'(x', y')$, maka $\left\{ \begin{array}{l} x' = px - qy - s \\ y' = \pm(qx + py + t) \end{array} \right\}$ dengan $p^2 + q^2 \neq 0$.

Tes Formatif Modul 8

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

- 1) Diketahui $T(P) = P'$, $T(Q) = Q'$, dan $P'Q' = k(PQ)$ dengan $k > 0$, maka T disebut

 - A. Isometri.
 - B. Translasi.
 - C. Pencerminan.
 - D. Kesebangunan.

- 2) Jika T kesebangunan, 1 garis lurus, dan $T(l) = l'$ maka l'

 - A. Berupa garis lurus.
 - B. Bukan garis.
 - C. Berupa garis lengkung.
 - D. Bias garis lengkung dan bias garis lurus.

- 3) Jika T dan L kesebangunan, komposisinya adalah

 - A. Kesebangunan.
 - B. Dilatasi.
 - C. Isometri.
 - D. Translasi.

4) $D_{A,r}$ adalah dilatasi yang pusat A dengan factor skala r dan $D_{A,r}(P) = A$, maka

A. $P \neq A$.

B. $P = A$.

C. Jarak dari P ke A semakin dekat.

D. Jarak dari P ke A semakin jauh.

5) Diberikan s garis dan $D_{A,r}(s) = s'$. Pernyataan yang benar di bawah ini adalah

A. Jika $A \notin s$, maka $s' = s$.

B. Jika $A \notin s$, maka $s' \parallel s$.

C. Jika $A \notin s$, maka s' tegak lurus s .

D. Jika $A \notin s$, maka s' berimpit s .

6) Jika $\triangle ABC \approx \triangle XYZ, T(A) = X, T(B) = Y$ dan $T(C) = Z$, maka disebut

A. Isometri.

B. Translasi.

C. Kesebangunan.

D. Dilatasi.

7) Jika $D_{P,r}(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$, maka

A. $\triangle ABC'$ dipetakan ke $\triangle A'B'C'$ oleh $D_{P,r}$.

- B. $\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$
- C. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$
- D. A, B, dan C semuanya benar.
- 8) Jika himpunan A dipetakan oleh suatu kesebangunan T ke himpunan B , maka
- A. $A = B$.
- B. $A \approx B$.
- C. A tidak $\approx B$
- D. $A \neq B$
- 9) Jika T suatu kesebangunan, maka T adalah
- A. Isometri.
- B. Translasi.
- C. Dilatasi.
- D. Transformasi.
- 10) Jika T suatu transformasi, $T(x, y) = (x', y')$ dengan $x' = ax - by + c$ dan $y' = bx + ay + d$ dimana $a^2 + b^2 = 1$, maka T disebut
- A. Isometri lawan.
- B. Isometri langsung.
- C. Kesebangunan.
- D. Dilatasi.

MODUL 9

Grup Simetri dan Grup Dihedral

Kegiatan Belajar 1 : Simetri dan Grup Simetri

A. Refleksi Geser

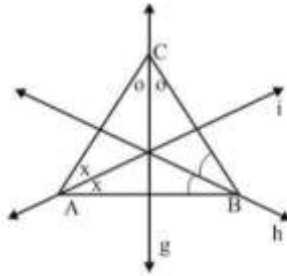
Definisi 9.1:

Jika $(G, \circ)$ adalah (.....) dan $a \in G$, maka $H = \{a^n \mid n \text{ bilangan bulat}\}$ adalah subgrup siklik dari grup $(G, \circ)$ yang dibangun oleh a . Jika $(G, \circ)$ adalah grup, $a \in G$ dan $H = \{a^n \mid n \text{ bilangan bulat}\}$ maka a adalah (.....) dari grup $(G, \circ)$ dan $G = \langle a \rangle$ adalah (.....).

Definisi 9.2:

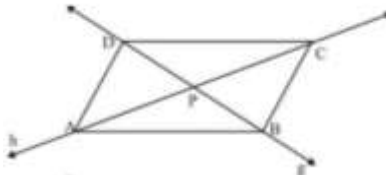
Andaikan H adalah himpunan titik-titik di bidang. Garis g disebut (.....) dari H jika $\mu_g(H) = H$ (artinya H invarian terhadap μ_g)

Anda perhatikan garis g , h , dan i yang merupakan garis-garis bagi sudut dalam $\triangle ABC$ yang sama sisi pada Gambar 9.1. Garis g disebut garis simetri $\triangle ABC$ sebab $\mu_g(C) = C, \mu_g(A) = B$, dan $\mu_g(B) = A$. Dengan demikian μ_g memetakan $\triangle ABC$ ke dirinya sendiri atau $\mu_g(\triangle ABC) = \triangle ABC$. Secara umum, memang harus diperiksa bahwa setiap titik $P \in \triangle ABC$ maka $\mu_g(P) \in \triangle ABC$. Anda diminta untuk meneliti, apakah garis h dan garis i merupakan simetri untuk $\triangle ABC$?



Gambar 9.1

Pada jajaran genjang ABCD di bawah, garis g dan garis h bukan garis simetri. Mengapa? Melalui setengah putaran dengan pusat P, jajaran genjang ABCD dipetakan terhadap dirinya sendiri atau $\sigma_p(\blacksquare ABCD) = (\blacksquare ABCD)$. Titik P disini disebut titik simetri.



Gambar 9.2

Definisi 9.3:

Andaikan H adalah himpunan titik-titik di bidang. Titik P disebut (.....) untuk H jika $\sigma_p(H) = H$ (artinya H invariant terhadap σ_p).

Dari definisi diatas, g garis simetri H dan P adalah (.....) H, yaitu $\mu_g(H) = H$ dan $\sigma_p(H) = H$. Maka μ_g dan σ_p disebut simetri untuk H. kita tahu bahwa μ_g dan σ_p merupakan isometri.

Definisi 9.4:

Andaikan H adalah himpunan titik-titik di bidang. Isometri φ disebut (.....) dari H jika $\varphi(H) = H$ (artinya H invarian terhadap φ)

Teorema 9.1:

Andaikan H adalah sebuah himpunan titik-titik di V , himpunan simetri-simetri dari H dengan operasi komposisi adalah (.....).

Latihan

- 1) Apa yang dimaksud dengan grup terhingga?
- 2) Berikan minimal dua buah contoh grup terhingga!
- 3) Periksa apakah $(G, \circ)$ dengan $G = \{1, \rho_{O,120}, \rho_{O,240}\}$ adalah grup!
- 4) Apa yang dimaksud dengan simetri suatu bidang?
- 5) Tentukan simetri-simetri pada sebuah persegi!

Rangkuman

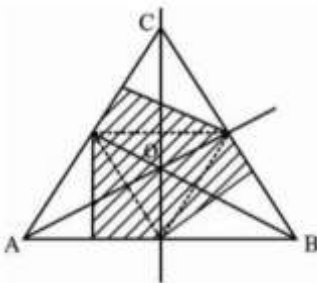
1. Grup yang ordonya terhingga disebut grup terhingga, sedangkan grup yang ordonya tak terhingga disebut grup tak hingga.
2. Jika $(G, \circ)$ adalah grup dan $a \in G$, maka $H = \{a^n \mid n \text{ bilangan bulat}\}$ adalah subgrup siklik dari grup $(G, \circ)$ yang dibangun oleh a . Jika $(G, \circ)$ adalah grup, $a \in G$ dan $H = \{a^n \mid n \text{ bilangan bulat}\}$ maka a adalah generator dari grup $(G, \circ)$ dan $G = \langle a \rangle$ adalah grup siklik.
3. Andaikan H adalah himpunan titik-titik di bidang, maka:
 - a. Garis g disebut garis simetri dari H jika $\mu_g(H) = H$ (artinya H invarian terhadap μ_g)
 - b. Titik P disebut titik simetri untuk H jika $\sigma_P(H) = H$ (artinya H invarian terhadap σ_P).
 - c. Isometri φ disebut simetri dari H jika $\varphi(H) = H$ (artinya H invarian terhadap φ)

Kegiatan Belajar 2: Grup Dihedral dan Teorema Leonardo

Teorema 9.2:

Untuk setiap bilangan asli- n , ada suatu segi- n yang memiliki grup simetri D_n dan ada suatu segi- n yang memiliki (.....) C_n .

Bila kita merumuskan kembali makna dari teorema diatas, disimpulkan jika ada segi- n yang mempunyai grup simetri D_n , maka grup tersebut tentunya memiliki subgroup C_n , Akan tetapi, ada juga segi - n yang hanya memiliki grup simetri C_n . Anda coba pelajari contoh berikut.



Gambar 9.3

Diketahui $\triangle ABC$ sama sisi dan terdapat daerah berbayang-bayang di dalamnya. Simetri- simetri yang dimiliki $\triangle ABC$ tersebut adalah $R = \rho_{O,120}$, $R^2 = \rho_{O,120}$, $R^3 = \rho_{O,360} = I$. Andaikan $G_1 = \{I, R, R^2\}$, $C_3 = (G_1, O)$ adalah group. Anda diminta untuk memeriksa bahwa C_3 adalah grup siklik yang dibangun oleh R .

Teorema 9.3 (Teorema Leonardo da Vinci):

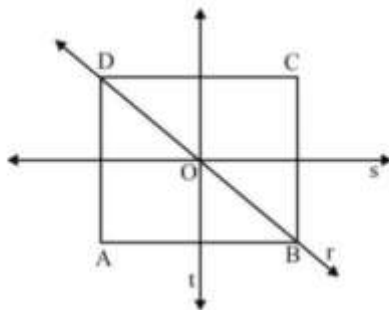
Sebuah grup (.....) adalah suatu grup siklik C_n atau grup dihedral D_n .

Teorema 9.4 (Teorema Akibat):

Grup simetri untuk segi banyak beraturan adalah sebuah (.....) atau sebuah (.....).

Latihan

- 1) Tentukan simetri-simetri persegi panjang (yang bukan persegi)!
- 2) Apabila $R = \rho_{O,90}$ dan $G = \{1, R, R^2, R^3\}$ merupakan himpunan simetri langsung dari persegi ABCD, apakah yang dimaksud $1, R^2$, dan R^3 ?
- 3) ABCD adalah persegi, sedangkan O adalah titik potong diagonal AC dan BD.



Gambar 9.4

Jika $\rho_{O,90} = R$ dan $\mu_i = M$, tentukan μ_i !

- 4) Jika G himpunan simetri-simetri persegi dan $(G, \circ)$ adalah grup, tentukan subgrup siklik dari $(G, \circ)$!
- 5) Jika G adalah himpunan simetri-simetri persegi ABCD, yaitu $\{1, R, R^2, R^3, M, RM, R^2M, R^3M\}$, tentukan $(R^2M)^{-1}$!

Rangkuman

1. Grup dihedral merupakan grup simetri segi- n beraturan. Grup ini memuat grup siklik. Grup dihedral dilambangkan dengan D_n dan grup sikliknya dengan C_n . Hubungan antara D_n dan C_n sebagai berikut;
 $D_n = (G_1, \circ)$ dengan $G =$ himpunan simetri segi- n beraturan dan $C_n = (G_1, \circ), G_1 = \{1, R, R^2, \dots, R^n\}$.
2. Untuk setiap bilangan asli n , ada suatu segi- n yang memiliki grup simetri D_n dan ada suatu segi- n yang memiliki grup simetri C_n .
3. Salah satu teorema yang berhubungan dengan grup dihedral dikemukakan oleh Leonardo da Vinci sebagai berikut; sebuah grup isometri terhingga adalah grup siklik C_n atau grup dihedral D_n .

Tes Formatif Modul 9

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) $(Z_4, +)$ adalah grup dan $1 \in Z$, maka $1^3 = \dots$

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.

2) $(G, \circ)$ adalah siklik dengan $G = \{\rho_{O,360}, \rho_{O,240}, \rho_{O,120}\}$. Generatornya adalah

- A. $\rho_{O,360}$
- B. $\rho_{O,240}$
- C. $\rho_{O,120}$
- D. $\rho_{O,360}$ dan $\rho_{O,120}$

3) H adalah himpunan titik-titik di bidang v , sedangkan g disebut garis simetri dari H, jika

- A. $\mu_H(g) = g$.
- B. $\mu_g(H) = H$.
- C. $\mu_H(v) = v$.

D. $\mu_v(g) = g$.

4) $O_p(H) = H$ dengan P adalah titik tertentu dan H adalah himpunan titik-titik di bidang v, maka

A. H adalah simetri dari P.

B. P adalah simetri dari H.

C. O_p adalah simetri dari H.

D. O_p adalah titik simetri dari H.

5) H adalah himpunan titik di bidang v. Isometri α disebut simetri dari H jika

A. $H(\alpha) = H$

B. $H(\alpha) = \alpha$

C. $\alpha(v) = v$

D. $\alpha(H) = H$

6) Titik O adalah titik potong $\overline{AC}$ dan $\overline{BD}$ yang merupakan diagonal-diagonal persegi ABCD. μ_s adalah simetri dari persegi tersebut, jika s melalui

A. O

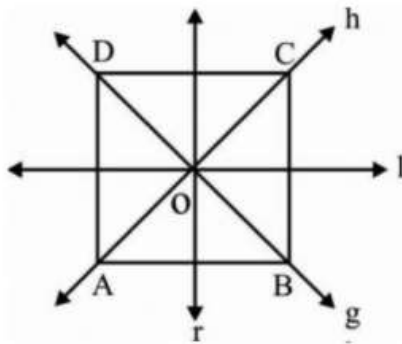
B. O dan tidak tegak lurus $\overline{AC}$

C. O dan tegak lurus $\overline{AC}$

D. Titik A dan B

Untuk soal nomor 4 s/d 10 gunakan ketentuan berikut:

$\overline{AC}$ dengan h adalah salah satu garis yang melalui



diagonal persegi ABCD. Kemudian, $\overline{AC}$ dengan O adalah titik potong karena diagonal persegi ABCD (perhatikan gambar).

7) Simetri-simetri persegi ABCD tersebut adalah

A. $\{1, R, R^2, R^3\}$.

B. $\{\mu_h, \mu_r, \mu_g\}$

C. $\{1, R, R^2, R^3, M, RM\}$

D. $\{1, R, R^2, R^3, M, RM, R^2M, R^3M\}$

8) Jika G adalah himpunan simetri persegi ABCD, subgrup siklik dari $(G, \circ)$ adalah $(H, \circ)$ dengan $H = \dots$

A. $\{R, R^2, R^3\}$.

B. $\{1, R, R^2, R^3\}$.

C. $\{M, RM, R^2M, R^3M\}$.

D. $\{1, M\}$

9) Jika G adalah himpunan simetri persegi ABCD dan $\mu_g = G$ maka $\mu_g = \dots$

A. RM .

B. R^2M

C. R^3M

D. MR

10) Jika G adalah himpunan simetri persegi ABCD, $RM \in G$, dan $R^3M \in G$ maka $RM \circ R^3M = \dots$

A. 1

B. R

C. R^2

D. R^2M

Daftar Pustaka

- Albab, I. U. et al., (2014). Kemajuan Belajar Siswa pada Geometri Transformasi Menggunakan Aktivitas Refleksi Geometri. *Cakrawala Pendidikan*, No.3.
- Adeel Khalid. (2014). Text Books: ebook Vs. Print. *Journal of Education and Human Development*. Vol. 3, No. 2, pp. 243-258.
- B. Rossa et all (2017). Print versus digital texts: understanding the experimental research and challenging the dichotomies. *Research in Learning Technology*. Vol.25, pp. 1-12.
- Darmawan, D. (2012). *Inovasi Pendidikan*. Bandung: PT Remaja Rosdakarya offset.
- Dimiyati Mujiono. (2002). *Belajar dan Pembelajaran*. Bandung: PT Gelora Pratama Aksara.
- Edwards, LD.1997. "Explore Ring the Terrority before Proof: Students' Generalization in a computer Microworld for Transformation Geometry". *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, Vol.1, pp.187-215.
- Eecles, Frank M. (1971). *An Introduction to Transformastional Geometry*. Philips Academy, Andorn,Massachusetts:Addison-Wesley, Publishing Company.
- Darhim dan Ame, R. (2014). *Geometri Transformasi*. Tangerang : Universitas Terbuka
- Hardiyanti, U. D. (2015) *Pengembangan Bahan Ajar Matematika Berbasis Website pada Pokok Bahasan Transformasi Geometri Kelas XI SMK Negeri 26 Jakarta*. Universitas Negeri Jakarta.
- Hollebrands, K. F. 2003. "High School Students Understanding of Geometric Transformations in the Context of a Technological Environment". *Journal of Mathematical Behavior*, 22, hlm. 55-72.
- Leontyeva, I. A. (2018). *Modern Distance Learning Technologies in Higher Education: Introduction*

- Problems. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14(10), 1-8.
- M. A Ebied dan S. A. A. Rahman. (2015). The effect of interactive e-book on students' achievement at Najran University in computer in education course. Journal of Education and Practice. Vol.6, No.19, pp. 71-82
- Martha, Z. D., Adi, E. P., & Soepriyanto, Y. (2018). E-book berbasis Mobile learning. Jurnal Kajian Teknologi Pendidikan, 1(2), 109-114.
- Martin, George E. (1982). Transformation Geometry : An Introduction to Symmetry. New York: Springer-Verlag.
- Munadi, Y. (2008). Media Pembelajaran Sebuah Pendekatan Baru. Ciputat: Gaung Persada (GP) Press.
- Prastowo, A. (2015). Panduan Kreatif Membuat Bahan Ajar Inovatif. Yogyakarta: Diva Press.
- Rawuh. R. (1990). Geometri Transformasi: Bandung: FMIPA-ITB.
- Silberman. M. L (2007). Active Learning strategi Pembelajaran Aktif. Yogyakarta: Pustaka Insani Zaeni.



Biodata

Dr. Lusi Rachmiazasi Masduki, M.Pd. lahir di Surabaya, 17 Juli 1959. Pendidikan Sarjana ditempuh di Universitas Muhammadiyah Surabaya bidang Pendidikan Matematika Lulus tahun 1986. Melanjutkan Pendidikan ke jenjang Pascasarjana Magister Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Semarang Lulus tahun 2009. Melanjutkan Pendidikan ke jenjang Doktoral Manajemen Pendidikan di Universitas Negeri Semarang Lulus tahun 2017.

Pengalaman di bidang akademik, menjadi guru Sekolah Dasar di SDN Gubeng III Surabaya dari tahun 1978 sampai 1986. Melimpah sebagai guru SPG di Kabupaten Rembang Jawa Tengah dari tahun 1986 sampai 1990. Alih fungsi sebagai Dosen FKIP di Universitas Terbuka Semarang dari tahun 1991 sampai sekarang. Penulis mengampu mata kuliah Pendidikan Matematika SD, Matematika II dan Statistika Pendidikan pada program S1-PGSD. Mengampu mata kuliah Materi Kurikuler Matematika SMA, dan Geometri Transformasi pada program S1 Pendidikan Matematika. Saat ini dipercaya mengampu tutorial online (Tuton) program Magister Pendidikan Dasar pada mata kuliah Integrasi Teori dan Praktik Pembelajaran.



Biodata

Pukky Tetralian Bantining Ngastiti, S.Pd.,M.Mat. lahir di Grobogan, 10 Oktober 1993. Pendidikan Sarjana ditempuh di Universitas PGRI Semarang bidang Pendidikan Matematika Tahun 2015 dan lulus dengan predikat sangat memuaskan. Melanjutkan Pendidikan ke jenjang Pascasarjana Magister Matematika di Universitas Diponegoro Tahun 2018 dengan minat Matematika Komputasi dan lulus dengan predikat sangat memuaskan.

Pengalaman di bidang akademisi, menjadi dosen selama kurang lebih 3 tahun di Universitas Billfath sebagai dosen tetap program studi Matematika. Selain itu penulis juga menjadi tutor di Universitas Terbuka pada program studi Manajemen. Penulis mengampu mata kuliah Kalkulus I, Kalkulus II, Geometri Analitik, Matematika Ekonomi, Statistika Ekonomi, Teori Fuzzy, Pemrograman Komputer 1, Pemrograman Komputer 2, Persamaan Diferensial Biasa, Struktur data dan algoritma, Kapita selekta dan Pemodelan.